


Digitized by Google



ANNALES

DES

PONTS ET CHAUSSÉES.

TOME XIII.

PARIS. — IMPRIMÉ PAR E. THUNOT ET Ce,
rue Racine, 26, près de l'Odéon.



ANNALES

DES

PONTS ET CHAUSSÉES.

MÉMOIRES ET DOCUMENTS

RELATIFS

A L'ART DES CONSTRUCTIONS

ET AU SERVICE DE L'INGÉNIEUR;

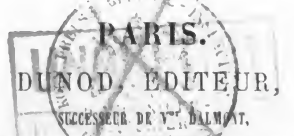
LOIS, DÉCRETS, ARRÊTÉS ET AUTRES ACTES

CONCERNANT

L'ADMINISTRATION DES PONTS ET CHAUSSÉES.

4e SÉRIE.

1867



PARIS.

DUNOD, ÉDITEUR,

SUCCESSEUR DE Vve DALMONT,

Précédemment Carilian-Gœury et Vor Dalmont,

LIBRAIRE DES CORPS IMPÉRIAUX DES PONTS ET CHAUSSÉES ET DES MINES,

Quai des Augustins, n° 49.





ANNALES DES PONTS ET CHAUSSÉES

MÉMOIRES ET DOCUMENTS

RELATIFS

A L'ART DES CONSTRUCTIONS

ET AU SERVICE DE L'INGÉNIEUR.

N° 140

EXPOSÉ DE LA SITUATION DE L'EMPIRE

Présenté au sénat et au corps législatif.

(*Moniteur* du 17 février 1867.)

Extrait relatif aux travaux publics.

ROUTES IMPÉRIALES.

Les routes impériales ont été maintenues, pendant la campagne de 1866 comme durant les années précédentes, dans un état convenable de viabilité. Ce résultat est dû aux efforts des ingénieurs, qui s'appliquent à rechercher les méthodes d'entretien les moins coûteuses. Mais on ne peut se dissimuler que les obstacles contre lesquels ils ont à

lutter vont toujours en s'aggravant; la main-d'œuvre devient de plus en plus rare et chère, et la concurrence de l'industrie, favorisée par la facilité des déplacements, enlève à l'administration ses meilleurs ouvriers; le prix des matériaux d'entretien a subi une hausse équivalente; et les routes, tout en conservant encore, grâce aux soins dont elles sont l'objet, une surface unie et résistante, reçoivent chaque année un cube de matériaux inférieur aux pertes qu'elles subissent.

Aussi un grand nombre de conseils généraux, organes autorisés des besoins de leurs départements, ont-ils renouvelé leurs réclamations contre l'insuffisance des crédits annuels d'entretien.

Le comité des inspecteurs généraux des ponts et chaussées, chargé de préparer le travail de répartition entre les départements, du fond d'entretien de l'exercice 1867, signale avec énergie la gravité de la situation, et appelle toute l'attention de l'administration sur les résultats fâcheux que produirait inévitablement le maintien de la réduction opérée, pour 1867, sur ce chapitre du budget. Le gouvernement, pénétré de la justesse de ces observations. n'a pas cru devoir persister dans une mesure qu'avaient commandée des nécessités budgétaires, et a rétabli presque intégralement au projet de budget de 1868 le crédit précédemment affecté à l'entretien des routes.

Les travaux extraordinaires relatifs aux routes impériales consistent :

1° Dans la construction des lacunes que présentent encore plusieurs de ces routes;

2° Dans la rectification des pentes rapides et dangereuses que l'on rencontre dans certaines parties de leur tracé ;

3° Dans la restauration ou reconstruction de ceux des grands ponts qui ont atteint le terme de leur durée ou qui

présentent des dispositions défectueuses pour la circulation.

La construction des routes impériales de la Corse et du réseau des routes forestières qui en forment le complément est l'objet de chapitres spéciaux.

Sur les 231 routes qui forment l'ensemble du réseau de l'Empire, 23 comprennent des lacunes dont la longueur était, au 1er janvier 1866, de 650 kilomètres, c'est-à-dire de près de 2 p. 100 de la longueur totale de ces routes, laquelle s'élève à 37 220 kilomètres, non compris les 1 080 kilomètres des routes de la Corse.

Les lacunes s'étendent d'ailleurs sur 16 départements, savoir : l'Ain, les Hautes-Alpes, les Basses-Alpes, les Alpes-Maritimes, l'Ariége, l'Aude, les Bouches-du-Rhône, la Drôme, l'Isère, les Landes, la Lozère, le Morbihan, les Hautes-Pyrénées, les Pyrénées-Orientales, la Savoie et la Haute-Savoie.

Indépendamment de ces lacunes, le gouvernement a pris à sa charge l'achèvement des routes départementales des départements annexés, sur une longueur de 140 kilomètres; de sorte que le développement total des lacunes à terminer ou à construire, au 1er janvier 1866, s'élevait à 790 kilomètres.

Les fonds affectés à ces dépenses, en 1866, ont été de 3 500 000 francs et ont permis de terminer 50 kilomètres de routes impériales et 15 kilomètres de routes départementales dans les départements annexés.

La situation, au 1er janvier 1867, est la suivante :

Sur les routes impériales, la longueur restant à construire est de 600 kilomètres et la dépense à faire de 28 700 000 fr. Pour les routes départementales des départements annexés, la longueur est de 125 kilom. et la dépense de 2 950 000 fr., soit, en totalité, pour l'ensemble des lacunes, 725 kilomètres à construire et 31 650 000 francs de dépenses à faire.

Les noms seuls des départements auxquels s'appliquent

ces travaux démontrent que l'état d'inachèvement des routes impériales frappent surtout les contrées montagneuses situées près de nos frontières et qui ne peuvent de longtemps encore être abordées par des voies ferrées.

Il serait donc extrêmement désirable et conforme à l'équité que ces contrées pussent jouir sans de nouveaux retards du bienfait d'un mode de communication qui est acquis depuis longtemps à tout le reste de l'empire.

La rectification des parties défectueuses des routes impériales est d'un grand intérêt pour la facilité et souvent même pour la sécurité de la circulation. Aussi l'administration a-t-elle, depuis de longues années, poursuivi avec persévérance ce genre d'amélioration, qui est vivement apprécié par les populations intéressées. Cependant on doit reconnaître que les travaux de rectification n'offrent pas le même degré d'urgence que ceux des lacunes. Ces derniers créent des communications, tandis que les premiers se bornent à les perfectionner. Aussi, tout en continuant, dans la limite des ressources dont elle dispose, les rectifications dont l'utilité paraît le mieux démontrée, l'administration se préoccupe-t-elle avant tout de pourvoir à la construction des lacunes.

Le crédit affecté à la rectification des routes impériales, sur l'exercice 1866, s'est élevé à 3 250 000 francs, et la longueur des nouvelles sections qui ont été livrées à la circulation dans le cours de cette année a été de 33 kilomètres. Au 1er janvier 1867, la longueur totale des rectifications autorisées par décret est de 586 kilomètres, y compris 19 kilomètres de routes départementales appartenant à la Haute-Savoie, et dont les dépenses doivent rester à la charge de l'état en vertu des décrets d'août et décembre 1860.

Ces diverses rectifications s'appliquent à 83 routes impériales et sont comprises dans 58 départements. La dépense restant à faire, au 1er janvier 1867, pour leur achèvement

ou leur construction, s'élève à 24 155 000 francs; mais, sur ce chiffre, une somme de 21 150 000 francs s'applique à des entreprises non commencées, de sorte que l'administration conserve toute latitude pour régler les dépenses de cette nature, d'après le degré d'urgence des travaux projetés.

Les grands ponts dont la reconstruction est motivée par leur état de vétusté ou leurs dispositions vicieuses ont reçu, en 1866, une allocation de 1 200 000 francs. Au moyen de ce crédit, on a soldé, dans le courant de la campagne, les travaux du grand pont du Var, juxtaposé au viaduc du chemin de fer de Toulon à Nice et destiné à remplacer l'ancien pont en charpente, qui tombait en ruine; on a pu également terminer le pont d'Albi sur le Tarn, qui doit remplacer l'ancien pont parvenu au dernier degré de vétusté; enfin, on a livré à la circulation le nouveau pont de Boisle, construit sur l'Authie, dans le département de la Somme, et celui de Mulhouse sur l'Ill. Les grands ponts actuellement en cours d'exécution s'élèvent au nombre de quatorze, et exigeront, pour leur achèvement, à partir du 1er janvier 1867, une dépense de 3 990 000 francs.

Les routes impériales de la Corse ont toujours été l'objet, comme on l'a dit plus haut, de dispositions spéciales. La situation topographique de ce département, qui le prive de toute voie navigable, et qui sans doute le privera pour longtemps de toute voie ferrée, imposait au gouvernement l'obligation impérieuse de le doter de routes de terre, qui seules pouvaient aider au développement de son agriculture et de son industrie. La loi du 25 mai 1836 avait classé 349 kilomètres de routes impériales en Corse. La loi du 26 juillet 1839 et les décrets du 3 mai 1854, du 16 juin 1856 et du 28 août 1862, y ont ajouté 731 kilomètres de routes nouvelles, sur lesquels il restait 190 kilomètres à terminer au 1er janvier 1866.

Le crédit affecté à ces travaux sur l'exercice 1866 s'est

élevé à 800 000 francs et a permis d'achever 40 kilomètres. Les dépenses restant à faire, à partir de 1867, sont évaluées à 4 960 000 francs.

Indépendamment des routes impériales dont nous venons de parler, la Corse a été dotée par les décrets du 28 mars 1852, du 1er avril 1854 et du 20 mai 1863, d'un réseau de routes forestières d'une longueur totale de 554 kilomètres. Le crédit ouvert en 1866 pour la construction de ces routes a été de 300 000 francs, et la longueur de route terminée dans le cours de cette campagne est de 10 kilomètres. Au 1er janvier 1867, le développement des routes forestières livrées à la circulation est de 506 kilomètres, et il reste à dépenser une somme de 2 930 000 francs pour le complet achèvement des 48 kilomètres qui restent à exécuter.

NAVIGATION INTÉRIEURE.

Le développement de la navigation intérieure de l'empire touche de trop près à tous les intérêts agricoles et industriels du pays, pour ne pas occuper une grande place dans les préocupations du gouvernement. Ainsi qu'on l'a dit bien des fois, la navigation peut seule former un utile contre-poids à l'influence exclusive des chemins de fer, et, par une sage concurrence, assurer à l'agriculture et à l'industrie le bienfait inappréciable des transports à bas prix.

Considérée dans son ensemble, la navigation intérieure, bien qu'elle se soit formée successivement de tronçons isolés, constitue aujourd'hui un vaste réseau, coordonné dans toutes ses parties et qui établit des communications continues entre les points les plus éloignés de l'empire.

Sans doute, toutes les lignes qui composent ce réseau ne présentent pas le degré de perfection qu'on est en droit de demander aujourd'hui. Telle voie navigable, qui, à une époque récente, semblait répondre à tous les besoins, n'est plus en rapport aujourd'hui avec les exigences légitimes

qu'entraîne le développement extraordinaire du commerce et de l'industrie. L'administration s'efforce de satisfaire, dans l'étroite limite des ressources dont elle dispose, à ces besoins, dont elle apprécie toute l'importance.

La navigation intérieure comprend 9 600 kilomètres de rivières classées comme navigables, et 5 050 kilomètres de canaux ou de rivières canalisées, assimilées aux canaux. Si l'on déduit de cette classification les rivières dont la navigation est en quelque sorte nominale, et les sections auxquelles a été substitué un canal latéral et dont la fréquentation est à peu près nulle, on est conduit à considérer le réseau de navigation de l'empire comme formé d'environ :

6 900 kilomètres de rivières, ci.	6 900
4 850 kilomètres de canaux, ci.	4 850
Total.	11 750

Les rivières navigables qui, dans ces dernières années, et notamment en 1866, ont été l'objet principal de l'attention de l'administration, sont celles qui appartiennent aux grandes lignes de navigation dirigées de Paris vers les siéges les plus importants de notre commerce intérieur et extérieur. Telles sont les lignes de Paris au Havre et à la mer, par la basse Seine; de Paris à Strasbourg et au Rhin par la Marne; de Paris à Lyon et à la Méditerranée par la haute Seine, l'Yonne, la Saône et le Rhône.

Sur la basse Seine, entre Paris et l'embouchure de l'Oise, on a terminé dans la dernière campagne l'exhaussement des retenues de Marly et d'Andresy, de manière à assurer en tout temps un tirant d'eau de 2 mètres depuis l'embouchure de l'Oise jusqu'à l'entrée du canal Saint-Denis, à Labriche. On a, en outre, commencé et conduit avec activité les travaux du barrage éclusé de Suresnes, qui doit étendre le même tirant d'eau de 2 mètres jusqu'à l'écluse de la Monnaie, dans la traversée de Paris. Cette amélioration est

d'un haut intérêt pour la batellerie du Nord, qui jouit, depuis plusieurs années déjà, de ce tirant d'eau, depuis l'embouchure de l'Oise jusqu'en Belgique.

Quant à la navigation de la basse Seine, elle n'offre, à l'étiage, qu'un mouillage de 1m,60 environ, conformément aux prévisions de la loi du 31 mai 1846. Mais déjà le nouveau barrage éclusé de Martot, situé à 3 kilomètres en amont d'Elbeuf et terminé en 1866, a été combiné en vue d'assurer dans le bief supérieur un tirant d'eau de 2 mètres; et quant aux travaux restant à exécuter pour obtenir le même résultat sur tout le parcours du fleuve jusqu'à Rouen, travaux évalués à 6 500 000 francs, ils ont été autorisés par un décret du 11 août 1866, et seront prochainement entrepris.

Sur la Seine maritime, les digues, qui, en vertu du décret du 12 août 1863, doivent être prolongées de la Roque à Berville, sur une longueur de 6 kilomètres, sont terminées sur 4 kilomètres, jusqu'à l'embouchure de la Rille. On attend que les résultats de cet endiguement aient pu être constatés, avant de continuer jusqu'à Berville des travaux dont les effets pourraient se faire sentir sur les passes de la baie de Seine.

La Marne, qui forme la tête de la grande ligne navigable de Paris au Rhin, était restée dans son ancien état d'imperfection, alors que les canaux de Meaux à Chalifert, de Dizy à Vitry-le-François et le canal de la Marne au Rhin, de Vitry-le-François à Strasbourg, étaient déjà ouverts à la navigation depuis plusieurs années. Un décret du 24 mars 1860 a permis de combler cette lacune, en autorisant l'exécution des travaux complémentaires de la canalisation de la Marne, depuis son embouchure dans la Seine jusqu'à Dizy, origine du canal latéral. Ces travaux, qui consistent principalement dans la construction de neuf barrages éclusés et des deux dérivations de Saint-Maurice et de Chelles, ont été exécutés avec une grande activité et terminés en 1866. Il

reste encore à entreprendre quelques draguages et à améliorer le chemin de halage; mais, dès à présent, une navigation continue est ouverte entre Paris et le Rhin.

Sur la grande ligne de Paris à Lyon et à la Méditerranée, la haute Seine a été canalisée entre Paris et Montereau au moyen de la construction de douze barrages éclusés, qui sont aujourd'hui terminés.

La rivière d'Yonne, qui forme, entre Montereau et la Roche, la suite de la même ligne, doit être l'objet d'une amélioration semblable ; dix-sept barrages éclusés transformeront la navigation intermittente de cette rivière en une navigation continue, avec le tirant d'eau normal de $1^m,60$: les travaux, poussés avec une grande activité dans la dernière campagne, seront terminés en 1867.

La Saône, qui, depuis Saint-Jean-de-Losne, point d'arrivée du canal de Bourgogne, jusqu'au Rhône, à Lyon, appartient à la ligne dont nous nous occupons, a déjà reçu, à diverses époques, de nombreuses améliorations; mais ces travaux, qui consistaient principalement dans des draguages et dans le redressement et le rétrécissement du lit des basses eaux, n'ont pas suffi pour assurer à cette rivière le tirant d'eau normal nécessaire à la navigation. Un décret du 6 août 1865 a prescrit la construction à l'entrée de Lyon, près de l'île Barbe, d'un barrage éclusé qui doit faire disparaître les difficultés et les dangers du passage de Collonges. Cet ouvrage a été récemment adjugé. Un second décret ne tardera pas, d'ailleurs, à autoriser l'établissement de quatre autres barrages éclusés qui compléteront la canalisation de la Saône entre Lyon et Verdun, au-dessus de l'embouchure des deux canaux de Bourgogne et du Rhône au Rhin.

Les travaux d'amélioration du Rhône, entre Lyon et Arles, se poursuivent avec persévérance et avec un succès que l'expérience confirme chaque jour davantage. Deux des passages les plus difficiles du fleuve, dans la partie limitrophe

des départements de la Drôme et de l'Ardèche, ont été rectifiés à l'aide de travaux terminés en 1866; les tournants brusques sont remplacés par des courbes régulières; les hauts-fonds sont abaissés, et la navigation est devenue facile sur toute l'étendue des ouvrages. Le même résultat a été obtenu au passage du pont Saint-Benezet, dans le bras d'Avignon. Les travaux de rectification de sept autres passages, situés dans les départements du Rhône, de l'Isère, de la Loire, de la Drôme, de l'Ardèche, du Gard et des Bouches-du-Rhône, sont en cours d'exécution.

L'amélicration de la partie maritime du fleuve, entre Arles et la Tour-Saint-Louis, a été l'objet d'études qui sont actuellement en voie d'examen et qui ne tarderont pas à recevoir un commencement d'exécution.

Quant à l'embouchure du Rhône à la mer, après des efforts infructueux pour l'améliorer, par la concentration des eaux du fleuve dans un bras unique, l'on a dû y substituer un canal maritime, qui, prenant son origine sur la rive gauche du Rhône, à 500 mètres en aval de la Tour-Saint-Louis et à 7 kilomètres en amont de la barre actuelle, vient déboucher dans le golfe de Fos, au point connu sous le nom de l'Anse-du-Repos. L'écluse d'accession dans le Rhône aura 160 mètres de longueur de busc en busc, 22 mètres de largeur et $7^{m}.50$ de tirant d'eau. Le canal, de 3 600 mètres de longueur, aboutit dans un avant-port présentant une superficie de 78 hectares et formé par deux jetées, ayant, celle du sud, 1 620 mètres, et celle du nord 1 250 mètres de développement. Le canal est actuellement ouvert sur toute sa longueur et toute sa largeur, jusqu'à la profondeur de 2 mètres, au-dessous de la basse mer; le chenal dans l'Anse-du-Repos est descendu à la profondeur de 6 mètres sur 300 mètres de longueur, et la jetée est élevée à $1^{m},25$ au-dessus de la basse mer sur 1 000 mètres de longueur à partir de la plage; les fouilles de l'écluse sont très-avancées et cet important ouvrage sera entrepris

dès le début de la campagne prochaine. L'achèvement du canal Saint-Louis ne peut manquer d'exercer une grande et heureuse influence sur le développement de la navigation du Rhône.

Sur la basse Garonne, les travaux destinés à améliorer la navigation du fleuve, entre Bordeaux et la mer, ont obtenu un plein succès et ont assuré la régularité du service des paquebots transatlantiques de la ligne du Brésil. Les plus grands bâtiments du commerce peuvent aujourd'hui remonter sans difficulté jusqu'à Bordeaux, et les dimensions des navires y ont notablement augmenté dans ces dernières années. Il reste, pour compléter l'amélioration de la Garonne maritime, à exécuter quelques nouveaux ouvrages, dont on poursuit l'étude en ce moment.

Sur le crédit total de 10 millions de francs, inscrit tant au budget extraordinaire qu'au budget rectificatif de 1866 pour l'amélioration des rivières, les importants travaux que nous venons de mentionner ont reçu une allocation de 6 750 000 francs. Sur le surplus de ces crédits, une somme de 3 millions de francs, c'est-à-dire moins du tiers des allocations totales, a été répartie entre dix-sept voies navigables, formant des affluents des grandes lignes et présentant le caractère de navigation locale. Telles sont : la Sarthe, entre Angers et le Mans, et la Mayenne, entre Angers et Laval, dont la canalisation, entreprise en vertu de la loi du 31 mai 1846, n'a pu encore être terminée par suite de la modicité des allocations annuelles. Telles sont encore : la Vilaine, dans la traversée de Rennes ; la Vire, entre Saint-Lô et la ville de Vire ; l'Adour, entre Dax et Bayonne ; la Baïse, entre Condom et Mirande ; la Garonne, dans la traversée de Toulouse ; le Lot, entre Levignac et son embouchure dans la Garonne, rivières dont l'amélioration a été prescrite par la loi précitée du 31 mai 1846, et, en ce qui concerne le Lot, par des lois antérieures. Il serait à désirer que l'allocation de crédits plus considérables permît de

terminer promptement des ouvrages commencés à une date aussi ancienne, et dont les populations attendent l'achèvement avec une juste impatience.

Les autres travaux entrepris pour le perfectionnement de la navigation fluviale ont été autorisés par des décrets postérieurs à 1859. Ils concernent : la Charente, où s'exécutent les travaux d'amélioration du passage de Bourg-Charente, dans le département de la Charente, et de Saint-Savinien, dans celui de la Charente-Inférieure; la Boutonne, affluent de cette rivière, sur laquelle on exécute des barrages éclusés, l'un à Bellebat et l'autre à Lhoumé, pour faciliter la navigation entre Saint-Jean-d'Angély et l'embouchure de la Boutonne dans la Charente; la Nive, sur la rive gauche de laquelle on construit un quai, dans la traversée de Bayonne; le Var, dont l'endiguement, entrepris par le gouvernement Sarde, se poursuit avec activité sur une longueur de 23 kilomètres, le long de la rive gauche du fleuve ; le lac Léman, où l'on achève la construction du port de Thonon et l'amélioration de celui d'Evian; l'Arve et la Dranse, situées l'une et l'autre dans le département de la Haute-Savoie, et sur lesquelles on doit exécuter, avec le concours des communes et des propriétaires intéressés, des travaux d'endiguement et des chemins latéraux pour faciliter le flottage; enfin la Meuse, dont on achève la canalisation entre Verdun et Sedan, et la Lys, dont la navigation intermittente sera changée en navigation continue dans les deux départements du Nord et du Pas-de-Calais.

Indépendamment des travaux d'amélioration que nous venons de mentionner, l'administration a dû pourvoir d'urgence à la réparation des dommages causés aux ouvrages dépendant du service de la navigation par l'inondation du mois de septembre 1866. Nous nous bornerons à rappeler ici qu'une somme de 250 000 francs a été prélevée à cet effet sur le crédit affecté, en 1866, aux travaux d'amélioration des rivières, et que 950 000 francs ont été imputés,

par voie de virement, sur le crédit des chemins de fer. Quant aux diverses phases et aux conséquences de cette catastrophe, elles ont été exposées dans le rapport soumis à l'empereur le 22 octobre dernier, et inséré au *Moniteur* du 30 du même mois.

Les canaux forment le complément du réseau de la navigation intérieure, soit en franchissant les faîtes qui séparent les grands bassins hydrographiques, soit en substituant des voies artificielles aux parties défectueuses des rivières. Les canaux actuellement livrés à la navigation sont, en général, dans un état convenable de navigabilité; mais ils n'ont pas encore atteint le degré de perfection qu'exigent aujourd'hui les intérêts industriels du pays. L'alimentation est souvent insuffisante; les chômages d'été se trouvent ainsi prolongés outre mesure, et le tirant d'eau ne peut pas être maintenu constamment à son niveau normal; des curages extraordinaires, des étanchements, des revêtements de berges, des reconstructions de ponts dont la hauteur sous clef est insuffisante, l'empierrement des chemins de halage sont, en outre, nécessaires pour donner à la batellerie une complète satisfaction.

Des améliorations de ce genre sont en cours d'exécution sur plusieurs de nos anciens canaux. Un crédit de 1 million a été consacré, en 1866, à l'exécution de travaux d'amélioration sur les canaux de Bretagne, du Centre, de Bourgogne, du Rhône au Rhin, de l'Ill canalisée, du Berry, de Roanne à Digoin, du Nivernais, de l'Aisne à la Marne, de la Somme, de la haute Deule, de Saint-Quentin.

Le surplus du crédit affecté à ce service sur l'exercice 1866, c'est-à-dire une somme de 2 500 000 francs, a été appliqué à la continuation des nouveaux canaux actuellement en cours d'exécution. A l'aide de cette allocation, on a livré à la navigation le canal des houillères de la Sarre, qui, grâce aux avances faites par les industriels de l'Alsace, a pu être terminé dans un délai de moins de cinq an-

nées. La construction du canal de Vitry à Saint-Dizier a été également facilitée par les avances des industriels de la Haute-Marne, et cette voie navigable, décrétée en 1861, a été ouverte jusqu'à Saint-Dizier dans les premiers mois de l'année 1866; il reste à pousser le canal vers l'amont sur 9 kilomètres environ, jusqu'à Chamouilley, point où est établie la prise d'eau dans la Marne.

On a continué d'ailleurs la construction du canal de la Rochelle à Marans, qui est entrepris depuis de longues années; du canal de la haute Seine entre Troyes et Villebertin; enfin du canal de Roubaix, qui doit établir une communication navigable entre la vallée de la Deule et celle de l'Espierre, affluent de l'Escaut, en desservant, sur son parcours, les villes de Roubaix et de Tourcoing.

La construction de nouveaux canaux ne sera plus désormais qu'une rare exception, et, sauf le prolongement vers Donjeux du canal de Vitry à Saint-Dizier, on ne prévoit pas, quant à présent, la création de lignes nouvelles. Mais l'amélioration des voies navigables actuellement existantes est une entreprise de la plus haute utilité et qui sera poursuivie avec persévérance par l'administration.

PORTS MARITIMES.

Le mouvement maritime des ports de commerce se mesure par le tonnage total des navires entrés et sortis, chargés ou sur lest, en provenance ou à destination de l'étranger, des colonies et de la grande pêche, ou se livrant au cabotage. Cette base d'appréciation ne donne pas, il est vrai, une idée exacte du mouvement commercial, qui a pour mesure le tonnage des marchandises entrées et sorties; mais elle seule permet de juger du degré de fréquentation des divers ports et par conséquent de déterminer les travaux d'amélioration que chacun d'eux peut comporter.

Le mouvement maritime, tel que nous venons de le définir, ne comprend pas le tonnage des navires entrés en relâche ou affectés à la pêche côtière. Il y a là cependant un double intérêt que l'administration des travaux publics ne doit pas négliger; les ports de refuge et les ports de pêche, sans présenter par eux-mêmes aucune importance commerciale, méritent au point de vue soit de la sécurité de la navigation, soit du recrutement de la flotte, de fixer, au plus haut degré, l'attention du gouvernement.

L'ensemble du tonnage des ports de l'empire a suivi, dans ces dernières années, une progression constamment croissante. Le chiffre de ce tonnage, en 1854, différait peu des chiffres constatés en 1846 et 1847; il était de 12 531 500 tonnes. En 1864, dernière année dont les résultats aient été publiés, il s'est élevé à 17 638 000 tonnes, en réalisant ainsi une augmentation de 5 106 500 tonnes.

Dans cette augmentation, les trois grands ports de Marseille, du Havre et de Bordeaux, figurent ensemble pour un chiffre de 1 895 000 tonnes; leur tonnage total s'est élevé, en 1864, à 6 745 000 tonnes. Ce rapide accroissement démontre l'utilité et l'urgence des travaux d'agrandissement en cours d'exécution ou projetés pour ces places maritimes.

Les quatre ports qui suivent, dans l'ordre d'importance du tonnage, Dunkerque, Boulogne, Cette, Dieppe, comprennent ensemble, pour 1864, un tonnage de 2 500 000 tonnes, supérieur de 1 135 000 tonnes à celui de 1854.

Parmi les autres ports, ceux dont les progrès sont le plus sensibles sont : Calais, qui est passé du tonnage de 334 000 tonnes à celui de 477 000; Brest, qui s'est élevé de 229 000 tonnes à 414 000; Saint-Naraire, de 20 000 tonnes à 316 000; Honfleur, de 165 000 tonnes à 294 000; enfin Saint-Malo, de 130 000 à 198 000 tonnes.

Le crédit extraordinaire ouvert sur l'exercice 1866 pour

le service des ports maritimes et des phares s'est élevé à 13 050 000 francs. La majeure partie de ce crédit, c'est-à-dire une somme de 8 millions, a été affectée à l'amélioration des ports principaux que nous venons de citer. Un crédit de 3 950 000 francs a été consacré aux travaux de trente-deux autres ports d'une moindre importance, et 1 100 000 francs à l'éclairage et au balisage des côtes.

A Marseille, on a continué le bassin Impérial établi à la suite et au nord du bassin Napoléon. Ce bassin fait partie d'un nouveau projet d'agrandissement du port de Marseille, qui devra sans doute être décrété dans un avenir prochain. Mais, quant à présent, il est réduit au rôle d'un simple avant-port, couvert par une enceinte en enrochements, sans quais ni môles intérieurs, et abritant l'entrée du bassin intérieur, autour duquel seront groupées les formes sèches actuellement en cours d'exécution. Ces formes, destinées au radoub des navires, sont d'une utilité que peu de travaux présentent au même degré, aujourd'hui surtout que les bâtiments en fer exigent, à chaque voyage, une visite et un nettoyage complet de leur carène, sous peine de perdre la rapidité de leur marche. Leur exploitation est concédée à la compagnie des Docks-Entrepôts, moyennant son concours à l'ensemble des ouvrages jusqu'à concurrence d'une somme de 6 300 000 francs. Ces ouvrages sont en pleine voie d'exécution; l'enceinte dans laquelle ils doivent être établis est fermée par un batardeau de 1 000 mètres de développement et entièrement épuisée; le succès de l'entreprise est désormais assuré.

L'élargissement du chenal et la construction d'un second brise-lames au port du Havre doivent compléter les travaux destinés à faciliter aux grands bâtiments l'accès de l'avant-port. Ces travaux ont été poussés avec activité dans la dernière campagne et seront terminés en 1867. On a poursuivi en même temps l'exécution du projet d'agrandissement du port par l'annexion des terrains de la citadelle; on

a attaqué en premier lieu le creusement de la darse du Nord, en même temps que la construction de l'écluse de communication avec le bassin de l'Eure, de manière à livrer cette section à la navigation tandis que l'on exécutera le surplus des ouvrages.

Les travaux d'amélioration du port de Bordeaux ont pour objet l'élargissement des quais des Chartrons et de Bacalan, et la construction de deux quais verticaux de 207 mètres de longueur chacun, l'un à l'extrémité amont du quai des Chartrons, l'autre à l'extrémité aval de celui de Bacalan; une cale inclinée; d'un développement de 1 510 mètres, sera comprise entre ces deux portions de quais. Les terre-pleins de ces quais seront d'ailleurs portés à une largeur de 40 mètres. L'élargissement des terre-pleins aura pour effet de faciliter les mouvements d'une circulation qui s'élève à 2 500 colliers par jour, en réservant aux opérations de la navigation maritime et fluviale l'espace nécessaire pour la manutention des marchandises. Les quais verticaux sont particulièrement destinés aux bateaux à vapeur qui font des services réguliers entre Bordeaux et les divers ports de France et de l'étranger. Ces travaux sont en pleine voie d'exécution. On s'est occupé, en outre, dans la dernière campagne, de la consolidation de l'ancien quai vertical, qui a fait des mouvements considérables. Le programme de ces ouvrages confortatifs comprend l'établissement de tirants de retenue et la substitution d'un appontement aux remblais, derrière la partie du quai des allées d'Orléans qui est la plus menacée; il y a lieu de compter sur l'efficacité de ce système d'ouvrages.

Au port de Dunkerque, les premiers travaux exécutés jusqu'à ce jour, en vertu du décret du 14 juillet 1861, ont consisté dans l'exécution des deux fronts de l'ouest et de la porte d'eau de la nouvelle enceinte de la place, et dans l'appropriation des nouveaux fossés militaires de l'ouest à l'usage du canal de desséchement et de retenue pour les

chasses de l'écluse du Fort-Revers. On a, en outre, acquis les terrains nécessaires à l'achèvement des quais du bassin du Commerce et à la pose de voies ferrées formant raccordement de la gare avec la rive droite des bassins à flot. Quant au nouveau bassin à flot de l'ouest, qui forme l'un des objets principaux du décret de 1861, il doit être établi, ainsi que tous ses ouvrages accessoires, sur l'emplacement actuel des fossés de la place, et il ne pourra dès lors être entrepris qu'après l'achèvement complet des fossés de la nouvelle enceinte, lesquels sont plus nécessaires encore au service des chasses et desséchements qu'aux besoins du service militaire.

Le bassin à flot du port de Boulogne était presque entièrement terminé à la fin de la campagne de 1866, et n'exigera plus que quelques travaux complémentaires. Ce grand ouvrage pourra, suivant toute probabilité, être livré à la navigation en 1867.

A Cette, on a exécuté la majeure partie des ouvrages autorisés par le décret du 24 août 1859, c'est-à-dire l'approfondissement du canal maritime entre le pont de Montpellier et la darse de la Peyrade, le prolongement de ce canal jusqu'au bassin de la gare du chemin de fer du Midi, enfin l'élargissement et l'approfondissement du bassin latéral à la gare. Il reste seulement à creuser ce dernier bassin à la profondeur de 5 mètres, qui a été adoptée pour le canal maritime, et, en outre, à achever les quais des nouveaux bassins.

A Dieppe, le prolongement du quai Bérigny peut être considéré comme terminé. On a commencé dans la dernière campagne la nouvelle écluse qui doit mettre la retenue en communication avec le bassin Duquesne.

Les travaux qui s'exécutent en ce moment au port de Calais ont pour objet la restauration de la jetée de l'est et d'une partie de la jetée de l'ouest, et la réparation ainsi que l'abaissement du radier de l'écluse du bassin à flot. Un

projet plus important, celui de l'agrandissement de ce bassin, est actuellement en voie d'instruction.

A Brest, on continue avec activité la construction du nouveau port Napoléon dans l'anse de Porstrein. Les travaux sont avancés, et les résultats obtenus jusqu'à ce jour sont satisfaisants. L'ancien port de commerce, établi dans la Penfeld, est remis à la marine militaire, et tout le mouvement commercial, lequel, ainsi qu'on vient de le dire, a notablement augmenté, se fait dans de bonnes conditions au port Napoléon. Des voies de fer posées sur les quais communiquent par un embranchement avec la grande ligne de Brest à Paris. Quant aux transatlantiques qui font escale à Brest, ils sont encore obligés d'opérer en rade le transbordement des voyageurs et des colis, à l'aide d'un bateau à vapeur auxiliaire. Mais bientôt l'achèvement du curage et des quais du nord-est leur permettra de venir se placer commodément dans le nouveau port. En ce qui concerne le bassin à flot, dont la construction est comprise dans le programme des travaux décrétés, un nouvel examen a démontré la nécessité d'apporter des modifications importantes aux dispositions primitivement adoptées. Le projet modifié est en voie d'examen.

Le nouveau bassin de Penhoüet, en cours d'exécution dans le port de Saint-Nazaire, communiquera avec le bassin actuel par une écluse à sas de 25 mètres de largeur et de 140 mètres de longueur entre les portes. Ce bassin, dont la superficie sera de 22 hectares, doit comprendre trois formes de radoub de 13 mètres, 16 mètres et 25 mètres de largeur, répondant ainsi aux besoins des navires de toute dimension. Les premières dépenses ont eu pour objet l'acquisition des terrains que devait occuper le nouveau bassin et l'établissement d'une digue de ceinture, destinée à protéger les chantiers contre l'invasion de la mer. Dans la dernière campagne, on a mis à profondeur les fouilles d'une partie de l'écluse, et l'on a travaillé aux maçonneries de fondation

de la tête aval. On a d'ailleurs apporté de notables améliorations à l'entrée du bassin actuel, par l'exhaussement des bajoyers de la grande écluse et par le prolongement de la jetée du sud, combiné avec le redressement de la jetée du nord.

Les améliorations successives apportées au port de Honfleur, et notamment la reconstruction de la jetée du milieu, l'établissement de ponts tournants pour le passage des voitures et l'élargissement des quais, ont puissamment contribué au développement du trafic de ce port. Il reste à terminer le quai de marée qui est en construction sur l'emplacement de la jetée de bois, et qui est nécessaire pour l'accostage des bateaux à vapeur affectés à des services réguliers avec l'Angleterre.

Les travaux déjà exécutés à Saint-Malo, en vue de l'établissement d'un bassin à flot entre ce port et celui de Saint-Servan, bien que n'ayant encore rien changé à son fonctionnement comme port de marée, ont néanmoins produit de très-bons résultats. L'avant-port et le port actuel destiné à être converti en bassin à flot se trouvent bien abrités; l'entrée en est facile, les grands navires peuvent accoster les quais, et ceux-ci, arrasés à différentes hauteurs, donnent de grandes facilités pour l'embarquement et le débarquement des marchandises; la construction et le radoubage des navires s'effectuent commodément sur des cales ou des grèves disposées à cet effet; enfin les caboteurs en relâche peuvent, dans la plupart des circonstances, échouer en toute sécurité à l'abri du môle des Noires. Il reste aujourd'hui à terminer cette grande entreprise par la fermeture du bassin et le fonctionnement définitif des écluses. Divers travaux accessoires sont nécessaires pour assurer le succès de cette dernière opération, et le plus important d'entre eux consiste dans le prolongement du môle des Noires, travail indispensable pour achever d'abriter les écluses contre les vents du large. De graves objections ayant été produites de

la part de la ville de Saint-Malo contre la fermeture du bassin, le ministre de l'agriculture, du commerce et des travaux publics, de concert avec le ministre de la marine, a formé une commission mixte présidée par M. Chaix d'Est-Ange, vice-président du conseil d'état, et chargé de l'examen de cette difficile question. La commission s'est rendue sur les lieux, et, après avoir recueilli, auprès des personnes les plus compétentes, toutes les informations propres à éclairer son opinion, elle a formulé des conclusions tendant à maintenir dans leur ensemble les dispositions adoptées par les actes antérieurs du gouvernement. Ces conclusions servent de base à un projet de décret qui est actuellement soumis à l'examen du conseil d'état.

Divers travaux d'amélioration sont en cours d'exécution dans vingt-deux autres ports, dont nous citerons les principaux suivant l'ordre d'importance de leur tonnage.

A Bastia, on établit un nouveau port dans l'anse de Saint-Nicolas; à Rochefort, on achève la construction d'un bassin à flot pour la navigation commerciale; à Cherbourg, on a presque entièrement terminé la restauration et le prolongement du quai est de l'avant-port et le creusement du bassin à flot; à Bayonne, on reconstruit le quai de la place d'Armes; à Fécamp, on termine la reconstruction d'une partie des jetées renversée par la tempête; à Ajaccio, on a entrepris la construction d'une jetée de 200 mètres de longueur, à la pointe de la citadelle, ainsi que le prolongement du quai Napoléon.

Les ports de Gravelines, dont le système des chasses a été amélioré; de Marans, où l'on construit de nouveaux quais; des Sables, dont on achève le bassin à flot; de Popriano, où l'on exécute un débarcadère en maçonnerie; de Trouville, dont le bassin à flot a été livré à la navigation en 1866; du Tréport, dont on restaure l'écluse de chasse et les jetées, ont été dótés, dans la dernière campagne, d'allocations proportionnées à l'importance des travaux en cours d'exécution.

Enfin l'éclairage et le balisage des côtes ont continué à recevoir tous les développements qu'exigent les intérêts de la navigation.

On a poursuivi ou commencé, en 1866, la construction du phare de l'Espignette (Gard); de celui du Diamant, dans la rade de Brest, et du phare des Roches-Douvres (Côtes-du-Nord), qui doit figurer à l'Exposition universelle de 1867. Les travaux de balisage ont reçu également une vive impulsion. Aujourd'hui, le nombre des phares allumés sur les côtes de France est de 291, dont 44 de premier ordre; et le balisage, qui était presque nul il y a quelques années à peine, se compose actuellement de 978 balises en bois ou en fer, de 174 tours-balises en maçonnerie, de 498 bouées et de 382 amers.

SERVICE HYDRAULIQUE.

Le service hydraulique, dont la mission consiste, soit à exécuter directement certains travaux d'amélioration agricole, soit à surveiller l'exécution des lois et règlements qui intéressent à la fois la salubrité publique et la richesse agricole du pays, a vu s'accroître, en 1866, les affaires pour lesquelles son intervention est réclamée. Un coup d'œil rapide sur chacun des objets qui lui sont confiés suffira pour le démontrer.

Sologne. — Les crédits affectés, en 1866, à l'amélioration de la Sologne ont eu pour objets : la construction d'une notable partie des routes agricoles, le prolongement du canal de la Sauldre et le curage des rivières.

Le réseau des routes agricoles dont l'utilité publique a été déclarée par décret du 15 octobre 1861, a un développement total de 484 kilomètres. Dès à présent, les travaux sont terminés sur 407 kilomètres; ils se poursuivent sur 66 kilomètres, et ne restent à entreprendre que sur 11 kilomètres. On touche donc à l'achèvement de ces routes, et, dès à présent, l'administration peut évaluer à près de

800 000 fr. l'économie qui aurait été réalisée sur les prévisions du décret. Peut-être y aura-t-il lieu de profiter de cette économie pour donner satisfaction, en ce qu'elles peuvent avoir de fondé, à diverses observations qui se sont élevées, touchant l'insuffisance de certaines parties du réseau.

Le canal de la Sauldre se divise en deux sections : la première, d'une longueur de 30 kilomètres, entre Blancafort et le Coudray, est ouverte depuis longtemps, et a servi, en 1866, au transport de 6 000 mètres cubes de marne; la seconde section, du Coudray à la Motte-Beuvron, est en cours de construction. Les travaux ont été poursuivis dans la partie située sur le territoire du département du Cher ; quant aux travaux à exécuter dans le département de Loir-et-Cher, jusqu'au chemin de fer du Centre, ils sont approuvés et seront incessamment adjugés.

Le curage des cours d'eau a été interrompu par la succession de pluies et de crues qui s'est manifestée dans la saison ordinairement propice à cette opération ; mais, du moins, les études n'ont pas discontinué; de nombreux projets ont été préparés, et ils pourront être entrepris pendant la campagne prochaine.

Dombes. — Dans la Dombes (Ain), on a augmenté de 16 kilomètres la longueur des routes agricoles construites. Cette longueur, qui doit s'élever à 242 kilomètres, atteint déjà 200 kilomètres; les travaux se poursuivent sur 33 kilomètres ; il ne reste à les entreprendre que sur 9 kilom.

La compagnie du chemin de fer de la Dombes s'est acquittée jusqu'ici régulièrement des obligations que lui impose la loi du 18 avril 1863. Au 31 octobre dernier, on avait desséché et mis en valeur 1 394 hectares d'étangs. La superficie améliorée devait être portée, avant la fin de l'année, au chiffre de 1 500 hectares.

Brenne. — La modicité des fonds que l'administration peut affecter aux routes agricoles de la Brenne (Indre) ne permet pas d'en presser l'achèvement avec une très-

grande promptitude. Toutefois, on a terminé cette année une partie de route de 8 kilomètres, ce qui porte à 134 kilomètres l'ensemble des routes à l'état d'entretien ; les travaux se poursuivent en outre sur 46 kilomètres, et il reste à les commencer sur 43.

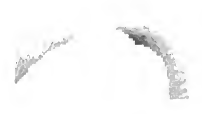
Corse. — En Corse, on a entrepris la construction de fontaines publiques à Vivario et à l'île Rousse, et le comblement du marais de Stagnone, situé aux portes de Calvi. On a continué les travaux du canal dérivé de la Gravona, qui doit alimenter les fontaines d'Ajaccio et satisfaire en même temps aux besoins de l'agriculture. En outre, des projets sont approuvés pour le desséchement de marais et la construction de douze nouvelles fontaines publiques.

Double. — Sur le réseau de routes agricoles dont la Double (Dordogne) a été dotée par le décret du 12 août 1863, on a terminé 2 kilomètres ; on a porté la longueur en construction à 53 kilomètres, et il reste à commencer les travaux sur 33 kilomètres. La question de la destruction des étangs touche au terme de son instruction, et pendant l'exercice 1867, on mettra la main à l'œuvre.

Lot-et-Garonne. — Le réseau des routes agricoles de Lot-et-Garonne est aujourd'hui terminé. Il présente un développement de 34 kilomètres environ ; son établissement aura exigé une dépense totale de 434 250 francs.

Landes de Gascogne. — L'ouverture des routes agricoles destinées à desservir les landes de Gascogne dans la Gironde et les Landes est accomplie. Ces routes sont au nombre de vingt-quatre et atteignent un développement de 458 kilomètres environ. L'état n'a plus à s'en occuper que pour assurer leur entretien dans les limites de l'article 8 de la loi du 19 juin 1856, ou pour concourir à cet entretien, dans le département des Landes, conformément à la loi du 12 juillet 1865.

L'assainissement et la mise en valeur des landes communales se poursuivent régulièrement. Sur une superficie to-



tale de 288 227 hectares, l'application de la loi du 19 juin 1857 a, jusqu'à ce jour, déterminé l'assainissement et le boisement de 171 140 hectares de landes insalubres et improductives; en outre, 32 288 hectares de landes ont reçu la préparation préliminaire de l'assainissement, en attendant qu'elles soient mises en valeur. Ces travaux, en augmentant dans une proportion notable la valeur des propriétés communales et la richesse publique, ont fait disparaître les fièvres épidémiques qui sévissaient autrefois dans le pays.

DRAINAGE.

L'application de la loi du 28 mai 1858 sur les prêts au drainage a pris, en 1866, quelques développements.

Dix prêts, s'élevant à la somme de 182 360 francs, ont été accordés pour le drainage de 745 hectares. Ce ne sont pas là encore des chiffres bien considérables; toutefois, comparés à ceux des années précédentes, ils semblent indiquer une tendance des cultivateurs à mieux apprécier les avantages que leur offre le gouvernement en facilitant les emprunts à un taux d'intérêt exceptionnellement réduit.

Au total, le nombre des prêts autorisés jusqu'à ce jour est de soixante-trois, le montant de ces prêts s'élève à 1 million, et la surface à laquelle ils sont applicables est de 5 000 hectares environ; en sorte qu'en moyenne l'état n'a prêté que 200 francs par hectare drainé, le surplus étant fourni par les emprunteurs eux-mêmes.

Sur la demande des particuliers et conformément à la décision impériale du 30 août 1854, les ingénieurs de l'état ont donné leur concours gratuit pour l'étude des projets et la surveillance des travaux de drainage sur un ensemble de 10 000 hectares.

Au 1er janvier 1866, on évaluait à 200 000 hectares environ la surface totale des terrains drainés en France, et,

dans cet ensemble de travaux, les prêts de l'état n'ont concouru que pour 2 1/2 p. 100.

L'opération du drainage coûte, en moyenne, 262 francs par hectare; mais elle produit par hectare une plus-value de 779 francs en capital, et de 57 francs en revenu. Pour l'ensemble des travaux exécutés jusqu'à l'année 1866, la dépense approximative de 55 millions paraît avoir produit une plus-value de 163 millions en capital et de 12 millions en revenu.

MISE EN VALEUR DES TERRAINS COMMUNAUX.

La reconnaissance générale des terrains susceptibles de tomber sous l'application de la loi du 28 juillet 1860 est désormais faite dans 33 062 communes. Elle a donné des résultats négatifs dans 26 853 communes; mais, dans 6 209, on a constaté l'existence de 321 722 hectares de terrains à mettre en valeur. Les études auxquelles il a été procédé dans l'année, en permettant de se rendre un compte plus précis des divers projets, ont donné lieu de penser qu'il faut évaluer seulement à 48 millions la dépense totale qu'entraînerait l'amélioration de ces 321 732 hectares, et que la plus-value serait de 155 millions.

Des transformations aussi considérables ne peuvent s'exécuter que graduellement, mais l'administration doit se féliciter de la bonne volonté qu'elle rencontre de la part des communes à déférer aux vœux de la loi. Aussi est-ce là pour elle un motif particulier de n'user qu'avec une extrême réserve, et en cas de nécessité absolue, des pouvoirs coercitifs que la loi confère, en cette matière, à l'autorité publique. Le nombre des projets exécutés d'office n'a été, jusqu'ici, que de 17, applicables à une superficie de 455 hectares. Quant à ceux dont les communes ont pris à leur charge la réalisation, ils atteignent le nombre de 1 641 et intéressent une superficie de 30 177 hectares.

Sur les 1 658 opérations dont l'exécution a été commencée soit par l'état, soit par les communes, 719 sont terminées et se rapportent à une superficie de 13 630 hectares; elles ont nécessité une dépense de 889 778 francs, et ont produit une plus-value de près de 5 millions; les autres, au nombre de 939, applicables à une surface de 17 002 hectares, se poursuivent et doivent, moyennant une dépense de 1 516 000 francs, produire une plus-value supérieure à 7 millions.

Dans 701 communes, l'administration a écarté ou ajourné 699 projets qui s'étendaient à 18 338 hectares.

ASSAINISSEMENTS ET DESSÉCHEMENTS.

La surface des terrains sur lesquels des travaux de desséchement ou d'assainissement ont été exécutés en 1866 avait été évaluée, en 1865, à 157 000 hectares. Mais, en cours d'exécution, l'état des choses s'est modifié de manière à permettre de réduire cette surface à 140 000 hectares environ. Quant à la dépense approximative à laquelle sont estimés les travaux, elle a été reconnue devoir atteindre 8 millions; 6 500 000 francs ont été déjà dépensés; une somme de 1 500 000 francs reste à employer pour terminer les opérations actuellement entreprises.

Quant aux projets à l'étude, ils embrassent une superficie de 236 504 hectares; mais ils ne sont pas suffisamment avancés pour que l'on puisse évaluer avec quelque exactitude les dépenses qu'exigerait leur réalisation.

CURAGES.

Dans 62 départements on a entrepris ou continué le curage de 2 839 cours d'eau, d'une longueur totale de 21 216 kilomètres, et la dépense totale a été de 10 588 173

francs, ce qui porte la dépense du kilomètre de curage en nombre rond à 500 francs. Dans dix autres départements. les curages se sont étendus sur 152 cours d'eau, et sur une longueur totale de 2 385 kilomètres; mais l'évaluation de la dépense n'a pas encore été fournie. L'ensemble de ces travaux intéresse une surface de 517 000 hectares. Les subventions de l'état ne se sont élevées qu'à 10 000 francs environ, mais les ingénieurs ont surveillé les travaux et ils ont étudié le curage de 658 nouveaux cours d'eau sur une étendue de 9 066 kilomètres.

USINES.

Sur les cours d'eau du domaine public, les usines sont réglées par décrets délibérés en conseil d'état; 58 usines ont reçu des règlements de ce genre. Sur les cours d'eau non navigables, il est intervenu 655 règlements par arrêtés préfectoraux, dont 312 sont relatifs à des usines de création nouvelle. De plus, l'administration élabore la réglementation de 905 autres usines sur lesquelles il sera statué ultérieurement.

Enfin 733 procès-verbaux de récolement ont constaté l'exécution des travaux prescrits, par des règlements antérieurs, à un pareil nombre d'usines.

La force motrice totale afférente à l'ensemble des établissements qui précèdent s'élève à 31 687 chevaux-vapeur.

IRRIGATIONS.

Les grandes entreprises d'irrigation ont fait, cette année, un progrès marqué; plusieurs canaux sont entrés dans la période d'exécution; d'autres ont été concédés, et enfin de nouvelles entreprises sont à l'étude.

CANAL DE LA NESTE.

Le canal de dérivation de la Neste (Hautes-Pyrénées), entrepris par l'état en exécution de la loi du 31 mai 1846, et destiné à alimenter les cours d'eau qui prennent naissance au plateau de Lannemezan, serait entièrement terminé, si l'on avait pu poursuivre sans interruption l'achèvement de la dérivation qui remplace un pont aqueduc, dont une arche s'est effondrée en 1865. Les travaux d'étanchement du canal sont achevés, et l'on a pu y mettre l'eau pour la livrer au camp d'artillerie établi sur le plateau de Lannemezan. Déjà même la Save, le Gers et les trois Baïses ont, pendant les étés de 1865 et 1866, reçu des volumes d'eau considérables. On étudie en ce moment des projets de rigoles secondaires à ouvrir, pour faire participer à la distribution des eaux de la Neste, la Gesse, la Gimone et le Bouès. On poursuit d'ailleurs l'étude des réservoirs à construire pour emmagasiner, dans la partie supérieure de la vallée, des eaux destinés à alimenter le canal pendant la saison des sécheresses.

CANAL DE VERDON.

En 1866, on a poussé activement les travaux du canal de Verdon (Bouches-du-Rhône), concédé à la ville d'Aix par un décret du 20 mai 1863, avec une subvention sur le trésor public de 1 500 000 francs et rétrocédé par elle à une compagnie particulière. Sur une dépense totale évaluée à 8 millions, il a été exécuté jusqu'ici pour plus de 4 600 000 francs de travaux. Ce canal, qui n'a pas moins de 230 kilomètres de longueur, doit arroser une étendue superficielle de terrains de 6 000 hectares et fournira, en outre, des eaux alimentaires aux habitants de la ville d'Aix. L'aug-

mentation de richesse à espérer est évaluée, en capital, à environ 18 millions.

CANAL DE FOREZ.

Le canal de Forez, d'une longueur de 126 kilomètres, qui est concédé au département de la Loire par le décret du 20 mai 1863, avec subvention de 1 112 500 francs, est destiné à porter les eaux d'irrigation sur une étendue de 9 000 hectares de la plaine dite *du Forez*, située entre la Loire et le Lignon. La plus-value qui sera acquise aux terrains arrosés est évaluée à 20 millions. Les travaux sont divisés en trois lots. Les ouvrages du premier lot, entrepris au mois de juillet 1865, ont été continués sans interruption jusqu'à ce jour ; trois tunnels ayant ensemble près de 300 mètres de longueur sont terminés. Les travaux faits représentent une dépense de 800 000 fr., dont 160 000 fr. ont été payés à titre d'à-compte sur la subvention accordée par l'état. Les projets définitifs du deuxième lot viennent d'être mis en adjudication.

CANAL DU DRAC.

On a exécuté, en 1866, plus du quart des travaux du canal du Drac (Hautes-Alpes), concédé par décret du 11 avril 1863 avec une subvention de 750 000 francs. Ce canal, qui doit dériver les eaux du Drac, est destiné à procurer à la plaine de Gap un accroissement de valeur de plus de 7 millions au moyen d'arrosages portés sur une surface de 4 000 hectares.

CANAL DE SAINT-MARTORY.

L'entreprise du canal de Saint-Martory à Toulouse (Haute-Garonne) a reçu, cette année, une solution définitive. Ce

canal, projeté, suivant la loi du 31 mai 1846, comme canal de navigation et d'arrosage à la fois, a été ramené, par le décret du 4 mai 1864, au simple rôle de canal d'irrigation, et la concession définitive en a été faite par décret du 16 mai 1866. Les travaux commenceront en 1867, et les populations verront bientôt s'achever une entreprise destinée à féconder, au moyen d'une dérivation des eaux de la Garonne, la vaste plaine qui s'étend sur la rive gauche de cette rivière.

CANAL DE LA SIAGNE.

Ce canal, d'une longueur de 42 kilomètres, est destiné à l'irrigation d'un territoire de 2 000 hectares dans le département des Alpes-Maritimes et doit fournir des eaux alimentaires à la ville de Cannes. L'entreprise en a été concédée, par un décret du 26 août 1866, avec une subvention de 500 000 francs, à la compagnie qui exécute les canaux de Verdon et de Saint-Martory. Les travaux sont évalués à 3 500 000 francs, et la plus-value qui en résultera est présumée devoir s'élever à 10 millions. Le projet définitif vient d'être approuvé, et les concessionnaires se sont mis en mesure de commencer les travaux dans le courant de 1867.

Outre ces grands canaux, quatorze autres sont concédés et en cours d'exécution ; ils sont destinés à étendre les bienfaits de l'irrigation à plus de 28 000 hectares et doivent procurer une plus-value de 18 millions environ.

Un grand nombre de canaux nouveaux sont d'ailleurs à l'étude, et leur exécution devra assurer la transformation de près de 200 000 hectares et procurer une plus-value d'au moins 200 millions.

En ce qui touche les irrigations privées, le nombre des décrets rendus en cette matière n'est que de 36, mais 742 arrêtés préfectoraux sont intervenus pour autoriser des barrages et prises d'eau sur des cours d'eau non navi-

gables ni flottables ; 609 d'entre eux s'appliquent à des irrigations nouvelles. De plus, 368 procès-verbaux de récolement constatent la régularité de travaux antérieurement autorisés. L'ensemble des entreprises s'étend à 13 500 hectares de prairies ; enfin 800 demandes sont en ce moment à l'instruction.

CHEMINS DE FER.

Le développement total des chemins de fer concédés était, au 31 décembre 1865, de 21 033 kilomètres, y compris 613 kilomètres concédés à titre éventuel.

Cette situation est aujourd'hui sensiblement la même ; car, dans le courant de la dernière année, deux concessions seulement : celle du chemin de fer d'Armentières à la frontière belge, de 3 kilomètres de longueur, et celle du chemin de fer d'Hazebrouck à la même frontière vers Poperinghe, d'une longueur de 14 kilomètres, ont été prononcées par décrets du 26 mai et du 19 décembre 1866.

La situation au 31 décembre 1866 est la suivante :

	ANCIEN réseau.	NOUVEAU réseau.	TOTAL.
	kilomètres.	kilomètre .	kilomètres.
Nord	1 100	514	1 614
Est	975	2 113	3 088
Ouest	900	1 637	2 537
Orléans	2 017	2 190	4 207
Lyon-Méditerranée	2 622	3 232	5 854
Midi	797	1 454	2 251
Ceinture	17	»	17
Victor-Emmanuel	»	134	134
Compagnies diverses (1)	1 348	»	1 348
Totaux	9 776	11 274	21 050 (2)

(1)

	kilomètres.
Charentes	296
Orléans à Châlons-sur-Marne	247
Arras à Etaples	141
Vendée	121
Médoc	98
Libourne à Bergerac	63
Épinac à Velar	55
Sathonay à Bourg	51
Lille à Béthune et à Bully-Grenay	45
Valenciennes à Lille	43
Perpignan à Prades	42
Vitré à Fougères	35
Saint-Dizier à Vassy	22
A reporter	1 259
Report	1 259
Anzin à Somain	19
Chauny à Saint-Gobain	15
Dunkerque à la frontière belge	14
Marseille à la Madrague de Podestat	11
Hazebrouck à la frontière belge	14
La Croix-Rousse à Sathonay	7
Enghien à Montmorency	3
Armentières à la frontière belge	3
Vireux à la frontière belge	2
Lyon à la Croix-Rousse	1
Total égal	1 348

(2) Non compris 216 kilomètres pour les chemins de fer d'intérêt local :

	kilomètres.
Paray-le-Monial à Mâcon	69
Châlons à Lons-le-Saunier	62
Pont-de-l'Arche à Gisors	51
Munster à Colmar	18
Glos-sur-Risle à Pont-Audemer	16
Ensemble	216

La longueur totale des lignes livrées à l'exploitation, au 31 décembre 1865, était de 13 562 kilomètres.

La campagne de 1866 est venue ajouter à ce chiffre un

contingent important. Le développement total des lignes ouvertes dans cette année est, en effet, de 944 kilomètres, répartis ainsi qu'il suit :

Nord. . . .	Soissons à Laon.		34
Est.	Châtillon-sur-Seine à Chaumont.		43
Ouest. . . .	Mayenne à Laval.	20	156
	Dreux à Laigle.	60	
	Argentan à Flers.	43	
	Laigle à Conches.	33	
Orléans. . .	Chalonnes à Cholet.	41	218
	Nantes à Napoléon-Vendée.	75	
	Massiac à Murat.	35	
	Aurillac à Figeac.	65	
	Embranchement de Decazeville.	2	
Paris-Lyon-Méditerranée. . .	Le Côteau à Amplepuis.	26	283
	Tarare à Saint-Germain-au-Mont-d'Or.	33	
	Gray à Ougney.	27	
	Cercy-la-Tour à Nevers.	53	
	Brioude à Langeac.	32	
	Montbrison à Andrezieux.	18	
	Le Puy au Pont-du-Lignon.	45	
	Aix à Annecy.	49	
Midi. . . .	Langon à Bazas.	10	120
	Tarbes à Lourdes.	29	
	Pau (Billères) à Pau (gare définitive).	2	
	Mousserolles à Bayonne.	2	
	Boussens à Saint-Girons.	31	
	Castres à Mazamet.	19	
	Perpignan à Collioure.	27	
Napoléon-Vendée aux Sables-d'Olonne.			36
Sathonay à Bourg.			51
Enghien-les-Bains à Montmorency.			3
	Total.		944

Il n'est pas nécessaire de faire ressortir l'importance de ces divers chemins de fer, qui appartiennent pour la plupart à de grandes lignes dont l'achèvement complet ne se fera plus longtemps attendre.

Il résulte des chiffres qui précèdent que la longueur to-



tale des lignes exploitées au 31 décembre 1866 est de 14 506 kilomètres, et, par suite, que la longueur restant à terminer ou à construire est de 6 544 kilomètres, savoir :

	LONGUEUR exploitée.	LONGUEUR à construire.	TOTAL.
	kilomètres.	kilomètres.	kilomètres.
Nord	1 231	383	1 614
Est	2 555	533	3 088
Ouest	2 013	524	2 537
Orléans	3 285	922	4 207
Lyon-Méditerranée	3 513	2 341	5 854
Midi	1 616	635	2 251
Ceinture	17		17
Victor-Emmanuel	106	28	134
Compagnies diverses	170	1 178	1 348
Totaux	14 506	6 544	21 050

Ces derniers chiffres se décomposent d'ailleurs, de la manière suivante, entre l'ancien et le nouveau réseau :

	ANCIEN réseau.	NOUVEAU réseau.	TOTAL.
	kilomètres.	kilomètres.	kilomètres.
Lignes exploitées	7 852	6 654	14 506
Lignes à terminer	1 924	4 620	6 544
Totaux	9 776	11 274	21 050

Quant à la situation des dépenses faites et à faire par les compagnies, au 31 décembre 1866, pour travaux de premier établissement, non compris les subventions de l'état, elle se résume ainsi qu'il suit :

	DÉPENSES au 31 décembre 1866.	DÉPENSES à faire au 1er janvier 1867.	TOTAL.
	fr.	fr.	fr.
Nord.	599 580 000	85 197 000	684 777 000
Est.	1 018 300 000	161 700 000	1 180 000 000
Ouest.	863 400 000	249 600 000	1 113 000 000
Orléans.	1 105 150 000	237 850 000	1 343 000 000
Lyon-Méditerranée.	1 915 840 000	708 460 000	2 624 300 000
Midi.	534 441 000	152 709 000	687 150 000
Ceinture.	8 744 000	»	8 744 000
Victor-Emmanuel.	45 000 000	21 000 000	66 000 000
Compagnies diverses. . . .	82 740 000	190 289 000	273 029 000
Totaux.	6 173 195 000	1 806 805 000	7 980 000 000

Les dépenses faites et à faire se partagent entre les deux réseaux de la manière suivante :

	ANCIEN réseau.	NOUVEAU réseau.	TOTAL.
	francs.	francs.	francs.
Dépenses faites.	3 074 365 000	3 098 830 000	6 173 195 000
Dépenses à faire.	509 014 000	1 297 791 000	1 806 805 000
Totaux.	3 583 379 000	4 396 621 000	7 980 000 000

Le rapprochement des divers chiffres que nous venons d'énoncer fait ressortir les dépenses moyennes faites et à faire par les compagnies pour chaque kilomètre de chemin de fer, savoir :

	fr.
Pour l'ancien réseau, à.	365 526
Pour le nouveau réseau, à.	386 978
Et en moyenne générale, à.	376 097

Le concours que l'état a jugé nécessaire de prêter aux compagnies de chemins de fer, pour assurer l'accomplissement de leur œuvre, s'est produit sous des formes di-

verses. Il a consisté, soit dans des prêts remboursables, soit dans l'exécution de travaux par les soins et aux frais de l'état, soit enfin dans des subventions, dont les unes sont payables en capital, et dont les autres ont été converties en un nombre d'annuités égal au nombre d'années restant à courir jusqu'à l'expiration de chaque concession.

Les sommes dépensées par l'état, au 31 décembre 1866, pour les travaux et pour subventions en capital, s'élèvent, déduction faite des prêts qui sont intégralement remboursés, au chiffre de 978 753 377 francs.

Les travaux restant à exécuter par l'état, à titre de subvention, consistent dans l'achèvement de la ligne de Toulouse à Bayonne, dans la construction des lignes de Toulouse à Auch, de Montrejeau à Bagnères-de-Luchon et de Lourdes à Pierrefitte, lignes concédées à la compagnie du Midi, et, en outre, dans l'achèvement du chemin de fer de ceinture, rive gauche, concédé à la compagnie de l'Ouest. Ce dernier chemin, ainsi que celui de Toulouse à Bayonne, sera livré à l'exploitation dans le courant de l'année 1867; quant aux autres lignes, elles ne pourront être commencées que vers la fin de la même année ou dans les premiers mois de 1868. Les dépenses à faire à partir du 1er janvier 1867, pour l'achèvement de ces divers travaux, sont évaluées à la somme de 17 350 000 francs.

D'un autre côté, les termes de subventions restant à payer aux compagnies des Charentes, de la Vendée, de la Dombes, de Perpignan à Prades, et, en outre, au gouvernement italien, après l'achèvement du souterrain du mont Cenis, s'élèvent à 52 558 000 francs.

Enfin, les subventions payables en annuités représentent un capital de 396 169 863 francs, dont l'intérêt et l'amortissement, calculés au taux de 4 1/2 p. 100 pour une période moyenne de quatre-vingt-douze ans, montent au chiffre de 18 272 500 francs par an. Ce mode de payement s'applique à la compagnie d'Orléans à partir du 1er oc-

tobre 1863, et aux autres compagnies à partir du 1er mai ou du 1er juin 1865.

D'après les chiffres qui précèdent, l'ensemble des subventions allouées par l'état pour l'établissement du grand réseau des chemins de fer s'élèvera, en capital, à la somme de 1 444 831 260 fr. représentant une somme de 68 638 fr. par kilomètre, de sorte que le coût total du réseau actuel des chemins de fer de l'empire, y compris les dépenses faites par les compagnies, sera, par kilomètre, de 447 735 fr.

Indépendamment des subventions dont nous venons de parler, l'état s'est engagé à garantir, pendant cinquante années, aux compagnies du Nord, de l'Est, de l'Ouest, d'Orléans, de Lyon-Méditerranée et du Midi, un intérêt de 4 p. 100, avec l'amortissement calculé au même taux, sur le capital de premier établissement d'une partie déterminée des lignes comprises dans leur concession.

Pour la compagnie du Victor-Emmanuel, la garantie d'intérêt est de 4 1/2 p. 100, mais elle s'étend à toute la durée de la concession et ne comprend pas l'amortissement du capital garanti.

Les sommes ainsi avancées par l'état doivent lui être remboursées par les compagnies, avec l'intérêt calculé à 4 p. 100, dès que le revenu du réseau garanti excédera le montant de l'annuité que l'état est tenu de compléter. Ces dispositions, qui semblaient, dans le principe, devoir être très-onéreuses pour le Trésor, ne lui imposeront par le fait que des avances d'un chiffre modéré, et dont le remboursement, d'ailleurs, ne paraît pas douteux. Dès les premières années, en effet, de l'application de la garantie, c'est-à-dire depuis 1864 pour la compagnie de l'Est, et depuis 1865 pour les autres compagnies, la progression des produits annuels a été beaucoup plus rapide qu'on ne l'avait prévu, et les espérances qu'on avait conçues, à cet égard, ont été largement dépassées.

La garantie d'intérêt à payer par l'état pour l'exercice

1866 ne dépassera pas, et peut-être même n'atteindra pas, le chiffre de 31 millions.

Les derniers exposés de la situation de l'empire ont déjà fait connaître que, dans la pensée du gouvernement, le grand réseau des chemins de fer de l'empire ne devait pas être considéré comme définitivement arrêté, et que, pour en combler les lacunes, il y aurait lieu d'y ajouter successivement de nouvelles lignes, dont la longueur totale pouvait être évaluée à 2 000 kilomètres environ.

L'administration a poursuivi, dans le cours de la dernière année, l'étude de celles de ces lignes qui paraissaient offrir le plus d'importance. Les projets en ont été soumis à une instruction qui est aujourd'hui très-avancée.

CHEMINS DE FER D'INTÉRÊT LOCAL.

La loi du 12 juillet 1865, relative aux chemins de fer d'intérêt local, a déjà reçu d'importantes applications.

Les départements de l'Eure et de Saône-et-Loire ont les premiers suivi dans cette voie les départements du Haut et du Bas-Rhin. Mais alors que les chemins de fer d'intérêt local exécutés dans ces deux derniers départements ont été compris, en vertu de la loi du 11 juin 1863, dans le nouveau réseau de la compagnie de l'Est, les lignes récemment classées par les départements de l'Eure et de Saône-et-Loire ont été concédées à des compagnies locales, qui se chargent, moyennant une subvention déterminée, d'en assurer la construction et l'exploitation.

Dans l'Eure, le chemin de Pont-de-l'Arche à Gisors, de 51 kilomètres de longueur, et celui de Glose-sur-Risle à Pont-Audemer, de 16 kilomètres, ont été déclarés d'utilité publique par deux décrets du 9 juin 1866. Les subventions de l'état ont été fixées, pour la première ligne, à 250 000 fr., et, pour la seconde, à 100 000 francs, c'est-à-dire au quart

de la dépense restant à la charge du département et des communes, conformément à la limite fixée par la loi pour les départements dont le centime additionnel aux quatre contributions directes excède 40 000 francs.

Dans Saône-et-Loire, deux lignes ont été concédées, la première de 69 kilomètres de longueur, de Châlon-sur-Saône à Lons-le-Saunier, jusqu'à la limite du Jura. Ce dernier département, s'associant à la pensée qui avait dicté les résolutions du département voisin, a concédé, dans les mêmes conditions, la partie de cette ligne comprise sur son territoire et dont la longueur est de 8 kilomètres.

La subvention allouée pour la construction de ces lignes par le décret du 16 juin 1866, qui en déclare l'utilité publique, est de 2 millions pour le département de Saône-et-Loire, et de 200 000 francs pour celui du Jura, c'est-à-dire du quart de la dépense à la charge des localités, comme pour le département de l'Eure.

Enfin un décret du 5 août 1866 a déclaré d'utilité publique une ligne de Colmar à Munster, d'une longueur de 18 kilomètres, entreprise par cette dernière ville, et a alloué, à raison de la situation financière du département du Haut-Rhin, une subvention égale au tiers de la dépense restant à la charge du département et de la ville, c'est-à-dire une somme d'un million.

Il résulte de ce qui précède que, sur une longueur de 216 kilomètres, des chemins de fer d'intérêt local, compris dans quatre départements, ont été concédés et décrétés dès la première année de l'application de la loi du 12 juillet 1865.

Dans leur dernière session, sept conseils généraux, ceux de l'Ain, des Ardennes, du Calvados, de l'Eure, de l'Hérault, du Pas-de-Calais, de la Seine-Inférieure, ont demandé la concession de chemins de fer d'intérêt local, au profit, soit du département, soit de compagnies particulières, et sollicité du gouvernement l'allocation de subventions proportionnées au chiffre de leur centime additionnel.

Ces demandes sont actuellement en cours d'instruction.

Vingt-deux autres départements ont admis l'établissement de diverses lignes, et la plupart ont voté en principe l'allocation de subventions sur les fonds départementaux; mais en l'absence de l'accomplissement des formalités d'enquête, et à défaut de demandeurs en concession, ces votes ne peuvent recevoir une suite immédiate.

Dix-huit départements ont autorisé les préfets à procéder à l'étude de certaines lignes déterminées; six ont également demandé des études, mais en laissant aux préfets le soin de désigner les lignes qui devaient en être l'objet.

Enfin 36 départements ont déclaré ajourner l'examen de la question ou n'ont pas pris encore de délibération à ce sujet.

Ces premiers résultats suffisent pour constater l'efficacité de la loi du 12 juillet 1865, et pour apprécier l'heureuse influence qu'elle doit exercer sur le développement de l'initiative départementale.

EXPLOITATION DES CHEMINS DE FER.

Nous examinerons, comme les années précédentes, les résultats de l'exploitation de nos voies ferrées au double point de vue de la sécurité publique et des intérêts commerciaux du pays.

Le dernier exposé de la situation de l'empire rangeait parmi les mesures les plus importantes, sous le premier rapport, l'adoption d'un système de communication entre les conducteurs de train et le mécanicien. Dès le début, les préférences des compagnies s'étaient portées sur certains appareils électriques qui semblaient se présenter dans les meilleures conditions de succès; les essais pouvaient être considérés comme terminés, et tout faisait présumer une solution prochaine et définitive. Ces espérances ne se sont point réalisées: on a reconnu que des organes aussi déli-

cats que ceux d'un appareil électrique s'accommodaient difficilement du mouvement et de la trépidation des trains en marche. Les expériences n'ont pas été cependant abandonnées; elles ont été poursuivies durant toute l'année avec un soin et une persévérance dignes d'éloges. Elles continueront encore pendant la campagne prochaine, et tout sera mis en œuvre pour corriger les imperfections des premiers essais.

Indépendamment de la communication par l'électricité, les compagnies étudient en ce moment un système acoustique qui est peut-être appelé à donner la solution du problème. Ce système, très-simple et très-ingénieux, pourrait, à peu de frais, assurer la communication des agents du train entre eux et même celle des voyageurs avec les agents. L'avenir prononcera bientôt sans doute sur le mérite de ces divers procédés.

L'administration a prescrit d'ailleurs aux compagnies d'établir des marchepieds et des mains courantes sur toute la longueur des trains de voyageurs, afin de permettre aux conducteurs de se porter, au besoin, vers le mécanicien, et de fournir en même temps aux voyageurs le moyen d'échapper à l'attaque d'un malfaiteur ou à l'incendie d'un wagon. Cette mesure est depuis longtemps en usage sur les réseaux du Nord et du Midi; elle devra être adoptée en 1867 sur les autres réseaux.

Les dispositions du cahier des charges font de la combustion de la fumée des locomotives une obligation légale, que l'administration a rappelée récemment encore aux compagnies de chemins de fer. D'après les renseignements aujourd'hui recueillis, un très-grand nombre de locomotives sont déjà, sur la plupart des lignes, pourvues d'appareils fumivores; les travaux d'installation sont conduits avec activité, et il est permis d'espérer qu'ils seront terminés avant l'expiration du délai dont il est parlé dans le dernier exposé de la situation de l'empire, c'est-à-dire le 21 avril 1867.

Une autre mesure qui intéresse à un haut degré le bien-être des voyageurs, c'est la création de trains de longs parcours contenant des voitures de 2e et de 3e classe et marchant à une vitesse qui se rapproche beaucoup de celle des express. Les avantages de cette combinaison sont tous les jours mieux appréciés par la partie du public qui n'est pas à même d'emprunter les trains exclusivement composés de voitures de première classe.

D'un autre côté, des compartiments spéciaux de toutes classes sont réservés pour les femmes voyageant seules. Cette disposition, depuis quelque temps en vigueur, a reçu, cette année, une plus grande extension par l'application qui en a été faite à tous les trains voyageant la nuit.

L'administration ne fera qu'un acte de justice en reconnaissant l'empressement qu'ont apporté les diverses compagnies à seconder les directions qu'elles ont reçues pour améliorer de plus en plus les conditions de sécurité et de bien-être qu'il est de leur devoir d'assurer aux voyageurs qui fréquentent leurs lignes.

L'exploitation des chemins de fer aurait donc présenté, en 1866, un ensemble de faits satisfaisant, si, en dépit de précautions de plus en plus minutieuses et de règlements élaborés avec le plus grand soin, d'accord entre le service du contrôle et les compagnies, des accidents d'une extrême gravité n'étaient venus réveiller des préoccupations qui tendaient à se calmer et à s'effacer même, en présence des résultats de l'exploitation dans ces dernières années. Le nombre des voyageurs tués, qui pendant longtemps n'avait pas dépassé la moyenne annuelle de cinq, a pris tout à coup des proportions inattendues,

Le 1er septembre, à la suite de pluies torrentielles, un pont s'est écroulé sur la ligne d'Avignon à Marseille, au moment du passage d'un train de marchandises; le mécanicien et le chauffeur ont été victimes de cet effrondrement. L'accident de Saint-Maixent, survenu à la date du 4 sep-

tembre sur le chemin de fer de Poitiers à la Rochelle, et celui de Franois, sur la ligne de Dijon à Besançon, arrivé le 23 décembre, ont coûté la vie, le premier à six voyageurs, le second à onze voyageurs et à cinq agents de la compagnie.

L'accident de Saint-Maixent est dû à un déraillement dont il a été jusqu'à présent impossible de découvrir la cause La voie était en bon état; les règlements avaient été observés, et l'on est, en quelque sorte, obligé d'inscrire le fait et ses funestes conséquences au compte de la force majeure.

Il n'en est pas de même de l'accident de Franois. Il s'agit ici de la collision de deux trains marchant en sens contraire, et, bien qu'elle se soit produite sur une section à simple voie, il est évident que, si les règlements avaient été observés, on n'aurait pas à déplorer la catastrophe qui a apporté un si douloureux contingent à la statistique de 1866. L'instruction judiciaire a constaté la culpabilité du sous-chef de gare, qui a été condamné au maximum de la peine.

Il est important d'ajouter que les chiffres ci-dessus rappelés ne représentent que le nombre des personnes tuées par le fait de l'exploitation; ils ne comprennent pas les voyageurs ou les agents qui ont été, cette année encore, victimes de leur propre imprudence ou de la violation des règlements.

Les résultats de l'exploitation commerciale ne sont pas encore relevés pour 1866, et nous ne pouvons que constater les faits principaux relatifs à l'exercice de 1865.

Pendant cet exercice, la longueur moyenne des chemins exploités a été de 13 228 kilomètres; le nombre total des voyageurs s'est élevé à 84 025 516, et la distance moyenne parcourue à 40 kilomètres, soit 3 milliards 361 millions de voyageurs transportés à 1 kilomètre.

Quant aux marchandises de petite vitesse, le nombre de tonnes transportées à toute distance a été de 34 019 436, et

le parcours moyen de 152 kilomètres, ce qui équivaut à 5 milliards 171 millions de tonnes ramenées au parcours de 1 kilomètre.

Les recettes brutes se sont élevées, pour les voyageurs, à 184 215 213 francs; pour les marchandises de petite vitesse, à 314 609 184 francs; et pour les produits divers, soit de la grande, soit de la petite vitesse, à 80 032 474 francs; ensemble 578 856 871 francs.

Comparés aux résultats correspondants de l'exercice 1864, les chiffres qui précèdent permettent de se rendre un compte sommaire des conséquences que les réductions de tarif ont eues pour les intérêts commerciaux. Malgré l'ouverture de lignes à fortes rampes et à faibles rayons, malgré les conditions coûteuses dans lesquelles se présentait l'exploitation de ces sections nouvelles, l'abaissement du tarif moyen kilométrique des marchandises de petite vitesse a suivi la marche constamment décroissante que l'on constate depuis l'origine des chemins de fer. Ce tarif moyen, qui, en 1864, ressortait à 6c.17, n'est plus en 1865 que 6c,08. C'est donc une réduction de 0c.59 qui, appliquée à 5 171 000 000 de tonnes transportées à 1 kilomètre, représente pour l'industrie et le commerce une économie de 4 654 000 francs.

Si l'on se reportait à quelques années en arrière, à 1855 par exemple, on trouverait que, dans cette période de dix ans, le prix moyen kilométrique des marchandises s'est abaissé de 1c,17, et que cette réduction, combinée avec le tonnage de 1865, représente une différence de plus de 81 millions de francs.

Dans un des derniers exposés de la situation de l'empire, nous signalions, parmi les faits les plus intéressants de l'exploitation des chemins de fer, les abonnements hebdomadaires consentis par la compagnie de l'Est aux ouvriers de Mulhouse qui habitent la campagne et que leurs travaux appellent journellement dans les fabriques de la ville. Cette mesure libérale a reçu en 1866 une extension nouvelle;

des abonnements du même genre et ayant le même objet ont été créés sur d'autres points du réseau de l'Est, en Alsace et en Lorraine.

La compagnie du Midi a suivi cet exemple ; elle a aujourd'hui des abonnements pour les nombreux ouvriers des mines de Graissessac qui partent tous les jours de Bédarrieux pour se rendre à leurs travaux. Elle a fait plus; elle a voulu faciliter aux populations des Landes le moyen d'envoyer à peu de frais leurs enfants aux écoles communales, et elle délivre à ces jeunes voyageurs des cartes d'abonnement mensuel à des prix exceptionnellement réduits.

On ne saurait trop applaudir à de semblables mesures, ni trop féliciter les compagnies qui en ont pris spontanément l'initiative. Tous ces abonnements, pour les ouvriers de l'Alsace et de la Lorraine, pour les mineurs de Graissessac, pour les enfants des Landes, font ressortir des réductions de prix qui s'élèvent à 90 p. 100.

Dans l'ordre des faits qui se rattachent au transport des marchandises, la dernière campagne a été signalée par une utile réforme. La vitesse de 125 kilomètres par vingt-quatre heures, attribuée aux expéditions à petite vitesse par l'arrêté ministériel du 15 avril 1859, a été portée à 200 kilomètres sur les lignes principales et pour les marchandises des deux premières séries ou payant le prix de la deuxième série. L'administration n'a pas cru devoir, quant à présent, exiger davantage; mais elle se réserve d'examiner si cette mesure, depuis longtemps réclamée par le commerce, ne pourrait pas plus tard être étendue aux marchandises d'autres séries et recevoir une application plus générale.

RÉSUMÉ.

La situation générale des travaux extraordinaires des ponts et chaussées et des chemins de fer peut se résumer ainsi qu'il suit :

Les dépenses faites pour le service des ponts et chaussées proprement dit, dans la période de 1848 à 1865 inclusivement, sont :

	fr.
Lacunes des routes impériales.	28 076 000
Rectifications.	71 555 000
Routes de la Corse.	7 922 000
Routes forestières diverses.	6 666 000
Grandes voies de Paris.	78 729 000
Grands ponts.	26 888 000
Rivières.	112 528 000
Canaux.	66 244 000
Ports et phares.	156 622 000
Service hydraulique.	24 514 000
Total.	579 744 000

Quant aux dépenses faites dans le cours de l'année 1866 et aux dépenses restant à faire à partir du 1er janvier 1867 pour l'achèvement des travaux décrétés, elles sont résumées dans le tableau ci-après :

	DÉPENSES en 1866.	DÉPENSES à faire au 1er janvier 1867.
	francs.	francs.
Lacunes.	3 500 000	31 652 000
Rectifications.	3 250 000	24 155 000
Routes de la Corse.	800 000	4 960 000
Routes forestières.	300 000	2 930 000
Grandes voies de Paris.	8 800 000	13 337 000
Grands ponts.	1 200 000	3 991 800
Rivières.	10 000 000	51 500 000
Canaux.	3 500 000	15 135 000
Ports et phares.	13 050 000	75 474 000
Service hydraulique.	3 500 000	18 316 000
Totaux.	47 900 000	241 450 800
En déduisant du total des dépenses à faire au 1er janvier 1867 les crédits de 1867, ci.		39 143 800
On trouve, pour les dépenses à faire au 1er janvier 1868, la somme de.		202 307 000

Cette dernière somme, ainsi qu'on l'a déjà fait connaître à diverses reprises, est loin de représenter l'évaluation des ouvrages qu'exigent encore les intérêts agricoles et commerciaux du pays. L'administration étudie et prépare le programme détaillé des nombreuses améliorations que réclame impérieusement la viabilité de terre, aussi bien que la navigation fluviale et maritime. Ce travail permettra d'apprécier le degré d'urgence relative des ouvrages projetés et d'aviser aux mesures à prendre pour en assurer la réalisation dans un délai convenable.

En ce qui concerne les chemins de fer, la situation financière se résume ainsi qu'il suit.

Les premières dépenses faites par l'état pour ces ouvrages remontent à l'année 1833. Elles se sont élevées dans les périodes

	fr.
De 1833 à 1847 à	335 933 470
De 1848 à 1851 à	297 266 444
De 1852 à 1865 à	333 753 483
En 1866	11 800 000
Total	978 753 397
L'état a payé en outre, sur les exercices 1864 1865 et 1866, une somme totale de 33 346 170 fr. représentant les annuités afférentes au capital de	396 169 863
Enfin il reste à solder, à partir du 1er janvier 1867, pour subventions payables en capital, ci	69 908 000
Ce qui porte le total des subventions de l'état en capital à	1 444 831 260

D'un autre côté, les dépenses faites et à faire par les compagnies concessionnaires de chemins de fer peuvent être établies de la manière suivante.

Les premiers travaux exécutés par les compagnies datent de l'année 1823, et il a été dépensé par elles,

	fr.
De 1823 à 1830 ci.	6 493 000
De 1831 à 1847 ci.	698 188 950
De 1848 à 1851 ci.	167 511 950
De 1852 à 1865 ci.	4 983 020 394
En 1866 ci.	317 980 706
Total.	6 173 195 000
Les dépenses restant à faire au 1er janvier 1867 sont évaluées à.	1 806 805 000
Le montant total des dépenses faites et à faire sera donc de.	7 980 000 000

ainsi qu'on l'a déjà fait connaître dans le cours du présent Exposé.

L'administration poursuit d'ailleurs l'étude des lignes nouvelles qui doivent compléter le réseau de l'empire, et ses propositions seront en temps opportun soumises à l'appréciation du Corps législatif.

L'Exposé de la situation de l'empire fournit sur quelques-uns des travaux exécutés par le ministère de la marine des renseignements utiles à reproduire ici.

. . . .

L'appropriation des ports aux besoins de la nouvelle flotte se continue avec autant d'activité que le permettent les crédits alloués.

A Cherbourg, on a terminé les forges d'armement, continué les travaux du nouvel hôpital maritime et de la nouvelle distribution d'eau, et commencé l'installation de grues hydrauliques Armstrong.

A Brest, on a terminé la grande forme est du Salou, continué les travaux de la forme nord, ceux de la forme dite *de Brest*, ainsi que ceux du tunnel destiné au prolongement du chemin de fer de l'Ouest jusqu'à l'arsenal. Enfin, on a fait la plus grande partie des acquisitions de terrains et de maisons nécessaires pour annexer à l'arsenal les quais de

l'ancien port de commerce et augmenter les terre-pleins de ces quais.

A Lorient, on a terminé l'allongement de la forme de radoub n° 1, ainsi que l'embranchement du chemin de fer sur l'arsenal. On a continué l'approfondissement du chenal du port et la construction de l'atelier des bâtiments en fer.

Enfin on a commencé des travaux d'installation et d'amélioration au polygone d'épreuve de l'artillerie de marine à Gavre.

A Rochefort, on a terminé la construction du quai de l'artillerie et continué les travaux d'installation du réseau ferré à l'intérieur de l'arsenal.

A Toulon, on a terminé le grand appareil de transbordement et de mâtage, continué le creusement de la darse Missiessy, les fondations des ponts de mer, le pont tournant et la double passe de Missiessy, les ateliers de pyrotechnie, la meunerie à vapeur, l'atelier des bâtiments en fer et enfin le magasin de gréements.

N° 141

MÉMOIRE

Sur les réservoirs de Gentilly et de Coulanges-la-Vineuse.

Par M. ROZAT DE MANDRES,
Ingénieur en chef des ponts et chaussées.

I. Réservoir de Gentilly.

Exposé. — Nous avons fait construire en 1861, pour le service des eaux de Paris (sous les ordres de M. l'ingénieur en chef Belgrand et de M. l'inspecteur général Michal, directeur) sur le plateau de Gentilly, à 300 mètres en dehors des fortifications, un réservoir en maçonnerie presque complétement en relief au-dessus du sol et pouvant contenir 6.000 mètres cubes d'eau avec une profondeur de $5^m.10$.

Le réservoir est alimenté en eau de Seine par les machines de Port-à-l'Anglais et par celles que nous avons fait établir, également sous la direction de M. l'ingénieur en chef Belgrand, en 1862 et 1863, sur le quai d'Austerlitz.

Le réservoir de Gentilly s'est parfaitement comporté; les effets provenant des variations de la température y sont à peine sensibles; nous croyons donc utile d'en faire connaître les dispositions principales et particulières.

Disposition générale. — Le sol est moyennement à la cote 78 mètres (au-dessus du niveau de la mer); le radier est à la cote 77 mètres et la tenue d'eau à la cote $82^m.10$.

Le réservoir devait occuper la superficie d'un carré d'environ 50 mètres de côté et être divisé en deux compartiments distincts; l'un des compartiments seulement (de

50 sur 25 mètres) a été exécuté (Pl. 131, *fig.* 1, 2, 3 et 4).

Murs. — Le mur de pourtour de 1^{m}.30 d'épaisseur au ommet, avec fruit extérieur de un cinquième, présente deux retraites de 0^{m}.20, l'une au niveau du sol, l'autre au niveau du radier; le parement intérieur est vertical sur 3^{m}.10 de hauteur à partir du sommet et se relie au radier par un solin de 2 mètres de rayon.

Le côté disposé pour être mur de refend a la même largeur au sommet, le fruit de un dixième sur chaque parement et le raccordement en solin de 2 mètres de rayon avec le radier. Ces murs sont couronnés par un dallage en pierre de taille de 0^{m}.15 d'épaisseur faisant saillie de 0^{m}.10 sur le parement extérieur.

Les angles sont disposés en pan coupé de 1 mètre de largeur; ils sont en pierre de taille ainsi que le socle formant la retraite au niveau du sol.

Tout le reste de la maçonnerie est en moellon ordinaire et mortier de chaux; en parement le moellon calcaire est remplacé sur 0^{m}.30 d'épaisseur moyenne par la meulière; les parements sont à joints irréguliers et rocaillés; le parement intérieur est en outre recouvert d'un enduit en ciment de Vassy de 0^{m}.03 d'épaisseur moyenne.

Radier. — Le radier a 0^{m}.30 d'épaisseur (sur un sol résistant, tuf du calcaire d'eau douce); il est en meulière posé en hérisson; le parement est rocaillé et recouvert d'un enduit en ciment de Vassy de 0^{m}.035 d'épaisseur.

Drainage. — Un système de drains est établi au pourtour intérieur du compartiment, sous le radier; le drainage aboutit dans une cuvette ménagée dans le fond du regard voisin de la conduite de décharge et qui peut se vider au moyen de cette conduite, par le jeu d'un robinet, lorsque la conduite n'est pas en charge.

Division en compartiments. Chaînage en fer. — Le compartiment de 50 sur 25 mètres est divisé dans sa plus grande longueur par un mur de refend de 1 mètre d'épais-

seur, percé d'arceaux de 2 mètres d'ouverture, de telle sorte que ce compartiment est réellement divisé en deux parties de 25 mètres de côté; de plus un chaînage en fer (de $0^{m}.04$ d'épaisseur) dont les maillons sont réunis par des tirants de $0^{m}.60$ de profondeur, est noyé dans la maçonnerie des murs de pourtour et de refend, à environ $0^{m}.70$ en contre-bas du couronnement.

Le réservoir est ainsi divisé en encadrements chaînés de 25 mètres de côté; c'est surtout à cette disposition que nous croyons devoir attribuer le peu d'effet apparent produit sur les murs par les variations de la température; ces variations sont, comme on le sait, ordinairement pour l'eau, à l'intérieur, de 0 à 27 degrés et pour l'air, à l'extérieur, de — 15 à + 35 degrés centigrades.

La disposition d'encadrements de 25 mètres environ de côté peut évidemment être appliquée aux plus grands réservoirs, au moyen de murs de refend évidés ou non — et nous l'avons proposée dans le projet que nous avons dressé, avec M. l'ingénieur Huet, pour le grand réservoir de 100 000 mètres cubes construit à Ménilmontant pour les eaux de la Dhuis.

Stabilité. — D'après la courbe des pressions, lorsque le réservoir est plein, la charge par centimètre carré est de $2^{k}.27$ sur la tranche de maçonnerie au niveau du sol extérieur et de $3^{k}.35$ sur le sol au niveau des fondations.

Dispositions particulières. Fontainerie.—Les dispositions du réservoir proprement dit sont complétées par l'établissement d'une petite bâche d'arrivée et de distribution de l'eau, par une chambre (ou regard) en avant du réservoir, contenant les robinets d'arrêt des conduites de départ, par un petit regard (ménagé dans l'épaisseur du mur de refend) pour le passage et la manœuvre de la conduite de décharge, du drainage et de la communication (prévue) entre les deux compartiments, enfin par la fontainerie nécessitée pour satisfaire aux quatre conditions du service; l'arrivée,

le départ ou la distribution, la décharge de trop plein et la décharge de fond (la conduite de décharge aboutit au fossé des fortifications).

Couverture.—Le réservoir de Gentilly est couvert d'après le mode déjà décrit dans notre mémoire sur les réservoirs de Passy (*Annales des ponts et chaussées*, 1859), c'est-à-dire au moyen de voûtes d'arête à deux rangs de briquettes à plat et mortier de ciment supportées par de petits piliers carrés en briques et mortier de ciment (*fig.* 2 et 3); les voûtes ont $3^m.80$ d'ouverture et $0^m.60$ de montée; les piliers ont $0^m.45$ d'épaisseur (deux longueurs de briques et un joint). Les piliers reposent simplement sur le radier; leur base est élargie au moyen de trois retraites de $0^m.05$ chaque, faites avec la brique sur chacune des trois premières assises; ces saillies sont répétées au couronnement du pilier sous la naissance des voûtes.

Le vide des retombées sur un pilier est rempli avec de la maçonnerie ordinaire sur $0^m.30$ de hauteur, puis avec un béton très-maigre jusqu'à l'arasement des voûtes, de manière à former la surface continue qui reçoit la chape ou l'enduit en ciment de $0^m.02$ d'épaisseur.

Les piliers de pourtour s'étendent sur toute la largeur d'une travée; ils sont percés d'arcs doubleaux de 2 mètres d'ouverture en plein cintre; ils ont $0^m.45$ d'épaisseur et supportent les voûtes en berceau aboutissant au couronnement des murs sans s'y appuyer. La couverture est effectivement tout à fait indépendante des murs de pourtour, les piliers du pourtour ayant été laissés isolés des murs; c'est là une modification importante en ce qu'elle évite la poussée exercée sur les murs de pourtour par la dilatation de la couverture, dilatation dont les effets ont été constatés aux réservoirs de Passy et qui sont tels que les voûtes en berceau se sont soulevées sur les piliers des pourtours en glissant sur ces piliers.

Ici du reste la couverture était dans l'origine exposée

directement à toutes les variations de la température et au soleil; on a hésité pendant quelque temps à la couvrir de terre; on avait bien confiance dans la solidité de ces voûtes si surbaissées et si minces (voir notre mémoire de 1859); mais on voulait laisser au mortier le temps d'acquérir toute sa dureté; alors on a chargé une partie de la voûte d'un poids double de celui d'une couche de 0m.30 d'épaisseur de terre, puis enfin toute la couverture a été chargée de 0m.30 de terre, et depuis 1862, il y a rue des Bassins, au-dessus de cette construction qui ressemble à une fortification sans issue, une prairie de 2200 mètres carrés de superficie à 10 mètres au-dessus des rues environnantes.

Aujourd'hui on donne un peu plus de flèche aux petites voûtes d'arête, et on les charge immédiatement de 0m.50 de terre, comme il a été fait en 1861 au réservoir de Gentilly, et comme il vient d'être fait aux grands réservoirs de Ménilmontant (*).

La terre est retenue par un petit mur qui couronne le bord de la couverture en suivant les inflexions des voûtes en berceau du pourtour (voir l'élévation, *fig.* 4).

(*) En proposant pour le réservoir Ménilmontant la forme demi-circulaire, commandée par la disposition de la couche des marnes vertes dans laquelle le réservoir devait être établi, nous avions adopté pour les lignes de mur de refend évidés et non évidés (pour faire l'encadrement par 25 mètres) et pour les lignes des petits piliers de la couverture, 1° les directions des rayons, 2° des courbes concentriques.

Cette disposition a été remplacée par des lignes parallèles se retournant près de la circonférence de pourtour normalement à cette circonférence.

On a ainsi obtenu plus d'uniformité pour la construction des voûtes. Mais nous pensons que l'on pouvait admettre les galeries rayonnantes qui se reproduisaient aussi uniformément, et qui, convergeant vers une grosse tour placée au centre de la demi-circonférence, eussent donné à l'ensemble de la construction un caractère particulier; cette tour centrale aurait donné accès aux étages inférieurs et l'on pouvait y réunir les pièces de la fontainerie, raccords, robinets-vannes, etc., etc.

Ces voûtes en berceau laissent au-dessus du couronnement du mur de pourtour des vides (soupiraux) que l'on ne peut laisser ouverts, soit en raison du froid pendant l'hiver, soit en raison du soleil pendant l'été; ils sont fermés au moyen d'une cloison en tôle fixée sur un châssis adapté à l'ouverture et portant une partie mobile, formant volet, que l'on peut ouvrir et fermer à volonté.

Quant au mode et aux précautions d'exécution nous les avons déjà indiqués dans notre mémoire sur les réservoirs de Passy.

Dépenses. — Le réservoir de Gentilly à un seul étage, presque tout entier en relief au-dessus du sol, dans des conditions ordinaires d'établissement, mais aussi dans des conditions de dimensions et de stabilité qui ne nous paraissent pas pouvoir être diminuées, doit fournir un bon exemple de prix de revient.

Voici d'abord les prix principaux d'application:

Les terrassements ont été payés à raison de 3f.50 le mètre cube de terre fouillée et transportée aux décharges.

La maçonnerie de moellon ordinaire avec mortier de chaux hydraulique (composé de deux volumes de chaux éteinte pour cinq de sable) a été payée 22 francs le mètre cube.

La même maçonnerie de meulière, 24 francs le mètre cube.

La maçonnerie de meulière avec mortier de ciment (composé de deux volumes de ciment pour cinq de sable) a été payé 34 francs le mètre cube.

La maçonnerie de briques de Bourgogne avec le même mortier, 63 francs le mètre cube.

La maçonnerie de pierre de taille (pierre de roche) avec mortier de chaux hydraulique a été payée 95 francs le mètre cube.

La taille simple de pierre de taille, en parement plan, a été payée 7f.50 le mètre carré.

Le mètre carré de rocaillage avec mortier de ciment et smillage de la meulière, a été payé 3f.90.

Le mètre carré d'enduit, avec mortier de ciment composé de volumes égaux de ciment et de sable, a été payé :

L'enduit de 0m.02 d'épaisseur, 3f.10,

L'enduit de 0m.03 d'épaisseur, 3f.70,

Et l'enduit de 0m.035 (du radier, fait en dernier lieu, le réservoir étant couvert et l'enduit compté comme fait sous galerie ou à la lumière), 5 francs.

Le fer pour chaînage a été payé, en place, 1 franc le kilogramme.

Le mètre carré de voûte à deux rangs de briquettes à plat avec mortier de ciment composé de volumes égaux de ciment et de sable, compris la chape de 0m,02 d'épaisseur
a été payé. . . . . 8 fr. } 11 fr.
plus pour le cintre. . . . . 3 fr. }

Ces prix étaient soumis à un rabais de 1f.25 p. 100.

En résumé la dépense totale a été de :

1° *Réservoir proprement dit :*		
Terrassements, maçonnerie, charpente, fer, etc.	fr. 93 685.53	
Fontainerie, fontes, robinets, bondes, etc.	12 187.28	
Frais de surveillance et divers.	1 842.03	fr.
	107 714.84	107 714.84
2° *Couverture :*	fr.	
Maçonnerie, charpente, terre, etc. . . .	36 724.95	
Fermeture des soupiraux et divers, etc.	1 680.81	
	38 405.76	38 405.76
Total général.		146 120.60

Prix de revient.—La capacité exacte étant de 6 048 mèt. cubes, l'emmagasinage d'un mètre cube d'eau revient à 24f.16 (non compris la valeur du terrain). Ces 24f.16 se divisent en 17f.81 pour le réservoir proprement dit et 6f.35 pour la couverture.

Aux réservoirs de Passy (à deux étages) le mètre cube de capacité a coûté (non compris le terrain) $22^{f}.12$ et, non compris la maison des gardiens, $21^{f}.70$. — Le prix de $24^{f}.16$ s'applique à un réservoir simple de $5^{m}.10$ de profondeur.

II. Réservoir de Coulanges-la-Vineuse (département de l'Yonne).

Nous croyons encore intéressant de donner l'exemple d'un réservoir couvert, établi dans le sol au lieu d'être en relief, et qui, construit en 1860, s'est maintenu en parfait état (*).

La commune de Coulanges-la-Vineuse (**) (département de l'Yonne) nous avait demandé un projet de réservoir de 900 mètres cubes; l'emplacement permettait de le placer *dans le sol résistant* en donnant une profondeur d'eau de 2 mètres, avec la forme carrée de $22^{m}.40$ de côté (hors œuvre) (***) (Pl. 131, *fig.* 5, 6 et 7).

Les murs de pourtour ont $0^{m}.40$ d'épaisseur moyenne $0^{m}.30$ au sommet et $0^{m}.50$ à la base; ils se raccordent avec le radier au moyen d'un solin de $0^{m}.50$ de rayon.

Le radier a $0^{m}.20$ d'épaisseur.

La couverture est formée de voûtes d'arête de $3^{m}.78$ d'ouverture et de $0^{m}.50$ de flèche reposant sur seize petits piliers intermédiaires de $0^{m}.34$ d'épaisseur, et sur vingt piliers culées de même épaisseur, appuyés contre le mur de pourtour (*fig.* 5).

(*) Cet ouvrage a été, comme tous les réservoirs nouveaux de Paris (Passy, Gentilly, Charonne, Belleville, Ménilmontant), construit par MM. Garnuchot et Laroque, entrepreneurs dont la capacité spéciale est une bien grande garantie pour le résultat de travaux aussi difficiles et aussi minutieux.

(**) Voir la notice à la fin du mémoire.

(***) La forme circulaire serait préférable puisque pour la même surface on aurait le moindre pourtour; mais le mode de couverture serait bien plus coûteux.

Les voûtes d'arête sont formées de deux rangs de briquettes à plat, elles sont recouvertes d'une chape (ou enduit de 0m.02) et de 0m.50 de terre.

Une ligne de drains est placée sous le radier au pourtour intérieur du réservoir et aboutit à la conduite de décharge.

Toutes les maçonneries sont en mortier de ciment de Vassy.

Au réservoir principal est accolé un petit compartiment ou regard carré (*fig.* 7) de 2 mètres de largeur et de même profondeur que le réservoir et dans lequel est placé le système de la distribution; un tuyau muni d'une bonde met en communication le réservoir et le regard; ce dernier peut recevoir directement l'eau de la conduite d'amenée et la jeter dans la conduite de distribution ou dans la décharge sans qu'elle passe par le réservoir; il fonctionne donc comme le réservoir et donne la facilité de réparer celui-ci.

Dans l'un des angles est placée la décharge de fond et de superficie.

Cet ouvrage construit en 1860 qui n'a exigé jusqu'alors aucune réparation et qui est en très-bon état a coûté pour le réservoir proprement dit (non compris la valeur du sol), en nombre rond, 16 000 fr.

La capacité exacte étant de 950 mètres cubes, le mètre cube de capacité revient à 16f.84 (*).

(*) Voici les prix élémentaires :

	fr.
Le mètre cube de terrassements, fouille et transport	1.30
Le mètre cube de maçonnerie de moellon dur et mortier de ciment	27.00
(Le moellon valait 6 fr.)	
Le mètre cube de maçonnerie de briques doubles et mortier de ciment	48.00
(Le millier de briques valait 55 fr.)	
Le mètre quarré de voûte en briquettes avec mortier de ciment (compris cintre et chape)	10.35
(Le millier de briquettes valait 36 fr.)	
Le mètre quarré d'enduit en mortier de ciment de 0m.02 d'épaisseur	3.05
(Le kilogramme de ciment de Vassy valait 0f.053 et le sable valait 7 fr. le mètre cube)	
Le mètre courant de drainage en tuyaux de 0m.06, tout compris	0.80

Il a été fait des conduits en mortier de ciment avec section in-

Dans ce prix le réservoir proprement dit entre pour $10^{f}.84$ et la couverture pour 6 fr.

Les petits travaux de fontainerie se rattachant au réservoir ne sont pas compris dans les dépenses ci-dessus, ils se sont élevés à 475 fr.

Ce qui porte à $17^{f}.34$ le prix de revient du mètre cube de capacité compris couverture et fontainerie.

Paris, juillet 1866.

Note sur les eaux de Coulanges-la-Vineuse.

L'art de découvrir des sources, fondé sur les connaissances géologiques, a occupé depuis longtemps les ingénieurs; nous en trouvons un exemple remontant à 1705 à propos des eaux de Coulanges-la-Vineuse; voici l'intéressant récit qu'en donne Fontenelle dans son éloge de Couplet, ingénieur membre de l'Académie des sciences (t. I, 2ᵉ partie) :

« Ce qu'il (Couplet) a fait de plus considérable a été à Coulanges-« la-Vineuse, petite ville de Bourgogne, à trois lieues d'Auxerre. « Coulanges est riche en vins, et de là vient son épithète, qui lui « convient d'autant mieux, qu'elle n'avait que du vin et point « d'eau. . . . .

« Les ingénieurs qui avaient tenté de chercher de l'eau, n'avaient « pas réussi, quoique vivement animés et par l'utilité et par la gloire.

« D'Aguesseau, alors procureur général, et aujourd'hui chan-« celier de France, ayant acquis le domaine de cette ville, voulut « faire encore un effort..... En 1705, il s'adressa à Couplet, qui « partit pour Coulanges au mois de septembre. Ce mois est ordi-« nairement un des plus secs de toute l'année : 1705 fut une an-« née fort sèche; et si l'on pouvait alors trouver de l'eau, il n'é-« tait pas à craindre qu'on en manquât jamais.

« En une infinité d'endroits de la terre, il court des veines d'eau « qui ont effectivement quelque rapport avec le sang qui coule « dans nos veines. Si ces eaux trouvent des terres sablonneuses, « elles se filtrent au travers et se perdent; il faut des fonds qui « les arrêtent, tels que sont les lits de glaise. Elles sont en plus « grande quantité selon la disposition des terrains. Si, par exemple,

---

térieure quarrée de $0^{m}.12$ et $0^{m}.03$ d'épaisseur de paroi à raison de $2^{f}.50$ jusqu'à $1^{m}.20$ de profondeur, et de $3^{f}.50$ de $1^{m}.20$ à $3^{m}.50$ de profondeur de tranchée.



« une grande plaine a une pente vers un coteau, et s'y termine, « toutes les eaux que la plaine recevra du ciel seront déterminées « à couler vers ce coteau, qui les rassemblera encore, et elles se « trouveront en abondance au pied. Ainsi la recherche et la dé- « couverte des eaux dépend d'un examen de terrain fort exact et « fin; il faut un coup d'œil juste et guidé par une longue expé- « rience.

« Couplet, arrivé à quelque distance de Coulanges, mais sans la « voir encore, et s'étant seulement fait montrer vers quel endroit « elle était, mit toutes ces connaissances en usage, et enfin promit « hardiment cette eau si désirée et qui s'était dérobée à tant d'autres « ingénieurs. Il marchait son niveau à la main; et dès qu'il put voir « les maisons de la ville, il assura que l'eau serait plus haute. « Quelques-uns des principaux habitants, qui par impatience ou « par curiosité étaient allés au-devant de lui, coururent porter « cette nouvelle à leurs concitoyens, ou pour leur avancer la joie « ou pour se donner une espèce de part à la gloire de cette dé- « couverte.

« Cependant Couplet continuait son chemin en marquant avec « des piquets les endroits où il fallait fouiller, et en prédisant dans « le même temps à quelle profondeur précisément on trouverait « l'eau; et au lieu qu'un autre eût pu prendre un air imposant de « divination, il expliquait naïvement les principes de son art, et « se privait de toute apparence de merveilleux. Il entra dans Cou- « langes, où il ne vit rien qui traversât les idées qu'il avait prises; « et il repartit pour Paris après avoir laissé les instructions néces- « saires pour les travaux qui se devaient faire en son absence. Il « restait à conduire l'eau dans la ville par des tranchées et par des « canaux de décharge en cas de besoin, et tout cela comportait « mille détails de pratique sur quoi il ne laissait rien à désirer; il « promit de revenir au mois de décembre pour mettre à tout la « dernière main.

« Il revint en effet; et enfin, le 21 décembre, l'eau arriva dans « la ville. Jamais la plus heureuse vendange n'y avait répandu tant « de joie. . . . .

« Couplet n'a fait que 3.000 livres de dépense à cette ville qui « aurait été ravie de se charger d'un impôt perpétuel; aussi crut- « elle bien lui devoir une inscription et une devise. L'inscription « est ce distique latin :

« Non erat ante fluens populis sitientibus unda ;
« Ast dedit æternas arte Cupletus aquas.

« La devise représente un Moïse qui tire de l'eau d'un rocher en-
« touré de ceps de vigne, avec ces mots :

« Utile dulci. »

Le territoire de Coulanges-la-Vineuse appartient aux terrains oolithiques supérieurs de la formation jurassique; — les argiles de Kimméridge et le Portland forment les coteaux qui dominent Coulanges; — en tranchant le sol au pied du coteau jusqu'à la couche argileuse, Couplet a recueilli les eaux d'infiltration qui s'arrêtent sur cette couche. — On trouva l'eau à environ 14 pieds de profondeur, et Couplet fit construire sur le fond des fouilles une pierrée.

Nous avons vu que l'eau arriva en abondance à Coulanges; mais on négligea l'entretien des tranchées et de la conduite, les pierrées s'engorgeaient, la conduite était imparfaitement réparée, et le mal fut tel qu'en 1779 on s'adressa à l'abbé Bossut, membre de l'Académie des sciences, inspecteur des machines et ouvrages hydrauliques des bâtiments du roi, etc., qui fit compléter les tranchées et réparer la conduite. L'eau revint en grande abondance, suivant un chroniqueur de 1780 auquel nous empruntons ces derniers détails.

Les tranchées, qui existent telles qu'elles ont été faites en 1780, sont des galeries voûtées dont le sol est dallé; la paroi du côté des sources est à jour; celle du côté opposé est étanche; tous les filets sont réunis dans un petit regard, d'où part la conduite qui va au réservoir; mais le produit des sources n'est plus abondant; en temps ordinaire il peut atteindre 100 mètres cubes par vingt-quatre heures et suffire aux besoins d'une population de 1.400 habitants; mais en temps de sécheresse ce produit descend à 25 mètres cubes; les fontaines étaient d'ailleurs disposées pour un écoulement continu; l'établissement d'un réservoir de 900 mètres cubes a eu pour but d'emmagasiner l'eau de manière à ne pas la laisser couler inutilement, et les fontaines à jet continu ont été remplacées par des fontaines à repoussoir.

Le maire actuel, M. Livras a donc rendu à son tour un grand service à son pays, et il poursuit la recherche de nouvelles sources; c'est d'ailleurs M. Ficatier (Henri), conducteur des ponts et chaussées à Auxerre, qui a dirigé, d'après nos instructions, les travaux du réservoir et de la distribution d'eau de Coulanges-la-Vineuse.

Paris, 11 mai 1867.

N° 142

NOTE

Sur la vérification de la stabilité des voûtes en maçonnerie et sur l'emploi des courbes de pression.

Par M. ALFRED DURAND-CLAYE, élève ingénieur des ponts et chaussées.

INTRODUCTION.

Principe de l'emploi des courbes de pression. — But de cette note.

La note que nous présentons a pour objet de préciser et d'étendre le rôle que peuvent jouer les courbes de pression dans l'étude de la stabilité des voûtes en maçonnerie; nous chercherons à éviter les tâtonnements ou les hypothèses que comporte habituellement l'emploi de ces courbes; nous indiquerons une marche certaine, et toujours la même, qui pourra s'appliquer à toute voûte existante ou à toute voûte projetée.

Principe de l'emploi des courbes de pression; valeur de la méthode. — Rappelons en quelques mots la valeur théorique qui peut être attribuée aux courbes de pression de M. Méry : nous mettrons ainsi en évidence les principes sur lesquels s'appuient nos remarques.

Le tracé des courbes de pression est généralement employé aujourd'hui pour l'étude des voûtes maçonnées; l'usage des formules et du calcul est réservé pour les arcs métalliques. La valeur des résultats auxquels on arrive dans

l'un ou l'autre cas est-elle comparable? Pour répondre à cette question, il suffit de se reporter un instant aux méthodes bien connues qui ont servi à établir les formules usitées pour les arcs métalliques: l'expérience a montré qu'en faisant agir sur les matériaux des forces déterminées et limitées, il se produisait entre ces forces et les actions moléculaires un état d'équilibre; on voyait l'équilibre réalisé, on connaissait complétement les forces extérieures, et on donnait une expression des forces dites moléculaires. Mais dans toutes ces expériences d'élasticité statique, on négligeait forcément l'étude du développement de ces forces moléculaires; on constatait un résultat. Lorsque ensuite dans les calculs d'une poutre droite ou d'un arc métallique, on emploie ces formules qui ne sont au bout du compte que l'énoncé de certains faits, lorsqu'on en déduit les dimensions à adopter, on vérifie seulement que le système projeté admettra les solutions d'équilibre auxquelles s'appliquent les formules; on néglige les causes mal définies qui pourront venir influer pendant la pose ou le décintrement sur le développement des forces moléculaires, comme elles ont pu intervenir dans la mise en expériences des tiges ou des fils qui servaient à formuler les lois de l'élasticité statique. Avec les dimensions calculées, l'équilibre sera possible, mais d'une façon mathématique on ne peut affirmer sa nécessité, puisqu'on n'est pas parti de l'état initial du système.

Pour les voûtes en maçonnerie, les formules sont laissées de côté; on sait le principe du tracé des courbes de M. Méry usitées dans ce cas: une poussée est définie par sa grandeur et son point d'application, ou bien par son point d'application et celui de la pression résultante sur un joint; on combine géométriquement cette poussée avec les poids des diverses portions de voûte et on joint les points d'application des résultantes sur les différents joints par un trait continu.

Mais pour que le tracé de cette courbe ait quelque valeur et soit autre chose qu'une série de constructions géométriques, il convient de définir rationnellement la poussée qui lui sert d'origine. A chaque valeur prise pour la poussée, à chaque point d'application correspond une courbe de pression : on cherche si parmi ces courbes il s'en trouve *une* correspondant à une solution d'équilibre. Autrement dit, on cherche si l'ouvrage étudié avec ses charges, surcharges, profils, admet une combinaison de la poussée et des poids telle qu'en aucun point les matériaux n'atteignent la résistance limite qui leur est imposée. Ainsi recherche de *la possibilité d'une solution d'équilibre*, voilà quel est le véritable sens de la construction et des tâtonnements indiqués par M. Méry. Le résultat est le même que pour l'arc métallique : l'ouvrage admettra au moins une solution d'équilibre; il se présentera dans des conditions identiques à celles que présentent d'autres ouvrages effectivement stables; l'équilibre pourra se réaliser; mais nous négligeons toujours les causes accessoires qui peuvent se développer au décintrement; de la possibilité de l'équilibre, nous concluons à la stabilité.

Objet de la présente note. — Le principe même de l'emploi des courbes de pression suivant la méthode de M. Méry, semble donc avoir une valeur comparable à celle des théories admises dans la résistance des matériaux. Mais il n'échappe à personne que le tracé habituel de ces courbes présente une sorte de vague et d'incertitude. On n'arrive à trouver une courbe d'équilibre, qui seule mérite le nom de courbe de pression, que par tâtonnements, en prenant arbitrairement deux points pour déterminer la courbe ou faisant varier la poussée en grandeur et en position, ce qui revient toujours à prendre au sentiment les deux conditions nécessaires pour définir la courbe. On n'a aucune idée du degré de stabilité de la voûte, puisqu'on s'arrête dès qu'une courbe d'équilibre est trouvée et que la voûte peut en com-

porter une infinité; l'influence de la résistance des matériaux n'est point suffisamment mise en évidence et les parties faibles du profil sont indiquées avec un certain vague. Lorsque, pour éviter des essais successifs, on se donne *à priori* la position du joint de rupture ainsi que les points où doit passer la courbe sur ce joint et sur le sommet, il est évident qu'on tient imparfaitement compte des conditions précises du problème, et on néglige jusqu'à un certain point l'influence, cependant si essentielle, du degré de résistance des pierres dont se compose la voûte.

Ce sont ces tâtonnements et ces hypothèses arbitraires que nous cherchons à supprimer. Nous ne déterminerons plus, un peu au hasard, une solution quelconque d'équilibre : connaissant les profils, les charges, la résistance effective ou réduite imposée aux matériaux, nous déterminerons par des constructions géométriques *toutes les solutions d'équilibre* que peut comporter la voûte. Nous ferons ainsi une application généralisée de la méthode des courbes de pression. Cette représentation complète des solutions d'équilibre aura sur le tracé d'une courbe unique un double avantage : 1° elle permettra de suivre tous les modes de répartition qui pourront se produire tant que la voûte sera en équilibre; elle mettra en évidence l'influence de la résistance des matériaux et montrera les points réellement faibles; 2° elle pourra de plus s'appliquer également bien à tous les exemples; elle permettra par la constance de ses procédés d'effectuer une étude réellement comparative des divers types, en tenant compte des différences de résistance et non plus seulement des épaisseurs et des profils, conditions purement géométriques.

CHAPITRE PREMIER.

DÉTERMINATION DE TOUTES LES SOLUTIONS D'ÉQUILIBRE QUE COMPORTE UNE VOUTE.

Hypothèses et formules élémentaires. — A. Nous rappelons que nous négligeons les efforts de traction suivant les joints. Les forces développées au contact de deux voussoirs sont alors toutes de même sens, et leur résultante est comprise dans l'étendue de la surface du joint, tant que l'équilibre subsiste.

B. Nous ne considérons que les composantes normales des résultantes sur les divers joints. Les composantes parallèles aux joints produiraient des effets de glissement assez faciles à étudier et dont l'examen est une conséquence trop naturelle de tout ce que nous allons dire pour qu'il soit nécessaire de nous y appesantir.

C. Nous admettrons enfin la théorie et les formules indiquées dans tous les cours de résistance des matériaux pour la répartition d'une charge totale sur la base d'un prisme rectangulaire reposant sans adhérence sur un appui, et nous les appliquerons à la répartition sur les divers joints de la composante normale de chaque pression résultante.

Ces formules sont les suivantes :

Soient (*fig.* 1, Pl. 132).

ABCD la base rectangulaire du prisme ou la surface de joint du voussoir.

f la longueur BD du joint.

H le point d'application de la pression.

N son intensité.

x distance du point d'application H à l'arête CD.

n pression par unité de surface produite sur l'arête CD qui est la plus comprimée.

Nous considérons du reste une épaisseur de voûte égale à l'unité de longueur, ce qui introduit quelque simplification, et la pression N est toujours supposée agir sur un des axes de symétrie du rectangle.

1er *Cas. Le point d'application* H *de la pression* N *est compris dans le dernier tiers* MP *de la longueur du joint.*

On a (*) :

$$\frac{2}{3} N = nx. \qquad (1)$$

2e *Cas. Le point d'application* H *de la pression* N *est compris dans le tiers central de la longueur du joint.*

On a :

$$2N - \frac{3}{f} Nx = \frac{nf}{2}. \qquad (2)$$

Remarquons du reste que :

1° Lorsqu'on a $x = \frac{1}{3} f$, les deux formules deviennent :

$$N = \frac{nf}{2}.$$

2° Lorsqu'on a $x = \frac{1}{2} f$, la formule (2) donne :

$$N = nf.$$

C'est le cas d'une répartition uniforme de la pression.

3° Tant que la formule (1) est applicable, une portion de

(*) Les formules indiquées dans l'ouvrage de M. Bresse, p. 54 et 55, sont :

$$n = \frac{N}{\Omega} \frac{4}{3(1-\mu)} (1) \qquad n = \frac{N}{\Omega}(1 + 3\mu) (2),$$

dans lesquelles Ω représente la surface du rectangle et μ le rapport $\frac{OH}{OP}$. En remplaçant Ω par f, OH par $\left(\frac{f}{2} - x\right)$, OP par $\frac{f}{2}$, on arrive à la forme que nous indiquons.

la surface rectangulaire cesse d'être soumise à aucune pression. La surface portante est limitée par une parallèle à CD, menée à une distance $3x$ de cette arête.

Construction des solutions d'équilibre pour une portion de voûte.—Ces préliminaires posés, reprenons l'étude d'une voûte.

La première question que nous allons résoudre est la suivante :

Une portion de voûte $c_o d_o$ cd (*fig.* 2 et 4) étant donnée avec ses charges, déterminer sur les joints $c_o d_o$, cd, toutes les poussées et pressions compatibles avec l'équilibre et avec un travail convenable des matériaux, c'est-à-dire avec des efforts de compression partout inférieurs à une limite donnée.

1° *Détermination des pressions compatibles avec l'équilibre.* —Les poussées compatibles avec l'équilibre, indépendamment de la résistance propre des matériaux, seront toutes celles qui, combinées avec le poids de la portion de voûte $c_o d_o$ cd, donneront des résultantes ayant leur point d'application dans l'étendue du joint cd; l'ensemble de ces dernières résultantes comprendra toutes les pressions sur cd compatibles avec l'équilibre.

Or considérons un point quelconque a situé sur le joint cd (*fig.* 2). Supposons que la pression résultante agissant sur le joint cd ait son point d'application en a. Cette résultante provient de la combinaison du poids de $c_o d_o cd$, poids représenté par une grandeur telle que FF′ ou GG′, avec une certaine poussée horizontale exercée sur le sommet.

Faisons varier arbitrairement le point d'application de cette poussée inconnue de c_o à d_o, c'est-à-dire donnons-lui toutes les positions possibles. Pour chaque position effectuons la construction habituelle de M. Méry, en astreignant toujours la résultante à passer par le point a (*); nous ar-

(*) Cette construction consiste simplement pour la poussée passant en c_0, par exemple, à prolonger l'horizontale passant en ce

rivons ainsi à déterminer les grandeurs d'une série de poussées telles que FP, G'Q. Portons ces grandeurs en c_0d_0 sur les normales correspondantes; nous obtenons ainsi de A_s en B_s une série de droites dont les extrémités forment une courbe telle que A_sB_s. Elles représentent toutes les poussées qui, combinées avec le poids GG', donneraient une pression résultante passant en *a*.

Faisons maintenant varier la position du point *a* de *c* en *d* : pour chaque position nous obtiendrons une courbe telle que A_sB_s; toutes ces courbes seront du reste comprises entre les deux courbes $\alpha_s\beta_s$, $\gamma_s\delta_s$, correspondant la première au point *c*, la seconde au point *d*.

Ainsi *toutes les poussées*, telles que les courbes de pression dont elles sont l'origine passent en un point du joint *cd*, doivent avoir l'extrémité de leurs lignes figuratives comprise dans la surface $\alpha_s\beta_s\gamma_s\delta_s$ déterminée sur le sommet, comme nous venons de l'indiquer, à l'aide des deux seules courbes $\alpha_s\beta_s$, $\gamma_s\delta_s$. Cette surface correspond donc à toutes les poussées compatibles avec l'équilibre.

Nous pouvons en même temps considérer chacune des pressions résultantes correspondant respectivement aux poussées, et en prendre la composante normale que nous porterons à partir des différents points du joint *cd* comme nous portions tout à l'heure sur c_0d_0 les longueurs représentant les poussées.

Nous obtenons ainsi sur chaque normale une longueur telle que A_iB_i, correspondant aux courbes A_sB_s obtenus sur le sommet et renfermant les extrémités des composantes

---

point jusqu'à la verticale FG contenant le centre de gravité de c_0d_0cd; à porter à partir du point d'intersection G une longueur GG' représentant le poids de c_0d_0cd; à joindre G au point *a*; à mener l'horizontale G'Q. G'Q est la grandeur de la poussée, GQ celle de la résultante. C'est la construction élémentaire de la composition des forces; la plus petite poussée correspond au point d_0, la plus grande à c_0.

normales de toutes les pressions résultantes passant aux divers points de *cd*.

Les points tels que A_i, B_i, étant réunis par une courbe, nous formons l'aire $A_iB_i\gamma_i\delta_i$, limitée aux deux lignes $\alpha_i\gamma_i$, $\beta_i\delta_i$; cette aire comprend les extrémités des composantes normales de toutes les pressions compatibles avec l'équilibre.

La réciprocité des portions de droite $\alpha_s\gamma_s$, $\beta_s\delta_s$ et des courbes $\alpha_i\gamma_i$, $\beta_i\delta_i$, des portions de droite $\alpha_i\beta_i$, $\gamma_i\delta_i$ et des courbes $\alpha_s\beta_s$, $\gamma_s\delta_s$, résulte des constructions mêmes. Les courbes $\alpha_s\beta_s$, $\gamma_s\delta_s$, $\alpha_i\gamma_i$, $\beta_i\delta_i$ sont faciles à déterminer par un petit nombre de points (*).

2° *Détermination des pressions compatibles avec un travail convenable des matériaux.* — Considérons un joint quelconque *cd* (*fig.* 3). La limite imposée au travail des matériaux en contact suivant ce joint est de *n* kilogrammes par unité de surface; c'est la limite de la cohésion ou l'effort maximum que la prudence engage à faire supporter aux éléments de nos constructions.

Or, lorsqu'une force normale vient agir sur la surface *cd*, les points les plus comprimés sont ou l'arête *c*, ou l'arête *d*, suivant que la force s'applique dans la partie *oc*, ou la partie *od* du joint; cela résulte de l'expérience et de la théorie rappelée plus haut. Supposons qu'en ces points les plus comprimés, la pression ait précisément atteint la limite *n* par unité de surface. Au moyen des formules (1) et (2), indiquées plus haut, dans lesquelles *x* et N seront maintenant les seules variables, nous pouvons obtenir de *c* en *o* une série de pressions normales N, correspondant chacune à la pression *n* que nous supposons dans tous les cas s'exercer en *c*; en supposant au contraire la pression limite produite en *d*, nous aurions des valeurs symétriques des pré-

(*) Voir, plus loin, la note A sur les propriétés géométriques de ces courbes, ainsi que sur les propriétés des courbes indiquées au numéro 2°.

cédentes de *d* en *o*. Joignons par une ligne continue les extrémités des lignes représentatives telles que N; nous obtenons ainsi une courbe à deux branches symétriques *cmωnd*, représentant les pressions limites qui peuvent être admises sur le joint *cd*. Une normale quelconque limitée à cette courbe et à la ligne *cd* représentera une pression résultante telle que, soit en *c*, soit en *d*, la pression limite serait atteinte; cette même courbe limite donc les pressions compatibles avec un travail convenable des matériaux.

Quant à sa nature géométrique, elle ressort immédiatement des formules (1) et (2). De *c* en *m*, *m* correspondant au point *m'* situé au tiers du joint, la courbe se réduit à une droite représentée par l'équation (1). Son coefficient angulaire est :

$$\frac{N}{x} = \frac{3}{2}n.$$

De *m* en *o* ce sont deux branches symétriques d'*hyperbole*, représentées par l'équation (2). Le point le plus élevé ω est donné par la relation :

$$N = nf.$$

L'origine *m* de la courbe a pour ordonnée $N = \frac{nf}{2}$, soit la moitié de l'ordonnée du point le plus haut.

Nous reviendrons sur la construction de ces courbes; nous ferons seulement remarquer pour l'instant qu'elles s'allongent à mesure que la limite *n* augmente, et qu'elles se transforment en deux droites parallèles, les deux normales *c* et *d* pour une résistance infinie.

3° ***Détermination des pressions compatibles avec l'équilibre et un travail convenable des matériaux.*** — Rapprochons les deux séries de pressions que nous venons d'étudier : dans le numéro 1°, nous avons déterminé toutes les poussées ou pressions compatibles avec l'équilibre, indépendamment de la résistance propre des matériaux; dans le numéro 2°, nous

avons indiqué pour toutes les pressions une limite résultant de cette résistance. Supposons les courbes obtenues dans les deux cas: considérons sur le joint *cd* l'aire $\alpha_1\beta_1\gamma_1\delta_1$ et la courbe *cωd* (*fig.* 4). Toutes les pressions résultantes dont les composantes normales aboutiraient lors de la courbe *cωd* sont à rejeter, comme faisant dépasser l'effort limite soit en *c*, soit en *d*; reste donc comme limite aux lignes représentatives des composantes normales l'aire réduite $\rho'\sigma'\varpi'\chi'$. L'élimination d'une partie des pressions sur *cd* entraîne l'élimination des poussées correspondantes; les quatre points $\rho'\sigma'\varpi'\chi'$, sont ramenés au sommet en $\rho, \sigma, \varpi, \chi$; les courbes $\rho\sigma$, $\varpi\chi$ sont construites toujours par la méthode élémentaire de M. Méry, et correspondent aux courbes $\rho'\sigma'$, $\varpi'\chi'$ du joint *cd*. Le nombre des poussées admissibles se trouve ainsi notablement restreint par la condition de la résistance limite imposée au joint *cd*. Mais tenons compte maintenant de cette même limite au sommet en c_0d_0; il est bien clair qu'il faut éliminer encore toutes les poussées dont les lignes représentatives se terminent hors de la courbe $c_0\omega_0d_0$. C'est donc dans l'aire *rspq* que devront tomber en définitive les extrémités des lignes représentatives de toutes les poussées admissibles.

Les quatre points *r*,*s*,*p*,*q*, peuvent être à leur tour ramenés sur la courbe *cωd* en R,S,P,Q; les courbes RP, SQ, correspondant aux arcs *rp*, *sq*, peuvent être déterminées par la construction habituelle, et l'aire RSPQ contiendra l'extrémité de toutes les composantes normales des pressions admissibles.

Ainsi, tant que sur le joint *cd* et sur la clef les matériaux ne travailleront pas au delà de la limite qu'on s'impose, ***toutes les poussées*** auront l'extrémité de leurs lignes représentatives comprises dans l'aire *rspq*, ce qui entraîne, comme conséquence forcée, que toutes les pressions résultantes sur *cd* auront l'extrémité de leurs composantes normales comprise dans l'aire RSPQ.

Toutes les poussées et pressions compatibles avec l'équilibre de la portion de voûte examinée et un travail convenable des matériaux se trouvent donc parfaitement déterminées.

Remarques. 1° Les contours des deux aires *rspq*, RSPQ, se correspondent d'après leur construction même. Si l'on prend un point quelconque de ces contours pour définir une poussée ou une pression, on est sûr que ce choix entraînera soit sur *cd*, soit sur c_0d_0, la pression limite $n^{\text{kil.}}$.

2° Les seules combinaisons donnant simultanément la pression limite sur *cd* et sur c_0d_0 sont celles qui correspondent aux quatre sommets *r*,*s*,*p*,*q*.

3° Lorsqu'on suppose aux matériaux une résistance indéfinie, l'aire *rspq* se confond avec l'aire $\alpha\beta\gamma\delta$, et les constructions se réduisent à celles de la *fig.* 2.

4° Les courbes limites telles que $c\omega d$, $c_0\omega_0d_0$, résultent des lois habituelles de la répartition des pressions sur un rectangle homogène; si ces lois venaient à être modifiées, le principe de la méthode n'en subsisterait pas moins, et la forme de l'aire *r*,*s*,*p*,*q* changerait seule, les courbes $\alpha\beta\gamma\delta$ restant toujours les mêmes.

Recherche générale des solutions d'équilibre que comporte une voûte. — Considérons maintenant une demi-voûte complète (*fig.* 5) appliquant et généralisant les considérations et les constructions que nous venons d'indiquer, cherchons à déterminer pour cette demi-voûte toutes les solutions d'équilibre compatibles avec la résistance des matériaux.

Prenons successivement les diverses portions de voûte comprises entre le sommet et les joints c_1d_1, c_2d_2,..... *fig.* 5; effectuons pour chacune d'elles la détermination des aires limites des poussées *rspq*. Pour ne pas faire dépasser la limite convenable aux matériaux, l'extrémité de la poussée doit être constamment renfermée dans chacune de ces aires, telles que $r_3p_3q_3p_3$, $r_4s_4q_4p_4$, etc. Il est par suite évident que toute poussée correspondant à l'équilibre et à un tra-

vail convenable des matériaux sera représentée par une ligne se terminant dans la partie *commune à toutes les aires* rspq.

Ainsi l'existence ou la non-existence de cette portion commune aux aires *rspq* entraîne l'existence ou la non-existence de solutions d'équilibre; et *toutes les solutions d'équilibre* seront celles qui seront définies par les poussées comprises dans l'aire commune, telle que l'aire $r_4s_4p_6q_6$ hachée dans la *fig.* 5.

Le résultat que nous venons de formuler est tout à fait général; la marche suivie pour y arriver peut se résumer en quelques mots :

Nous avons considéré une portion de voûte limitée à deux joints c_0d_0, cd. La condition géométrique de l'équilibre nous a donné les aires limites des poussées et pressions $\alpha\beta\gamma\delta$; la condition physique d'une résistance limitée nous a donné les aires telles que $c\omega d$. La superposition de ces aires sur chacun des joints extrêmes nous a donné une aire plus restreinte *rspq* contenant l'extrémité de toutes les poussées admissibles, et servant au besoin à définir une aire RSPQ, contenant les extrémités des composantes normales des pressions admissibles.

Nous avons pris ensuite une voûte complète. Les constructions précédentes ont été appliquées aux diverses portions comprises entre le sommet et les joints successifs. De la superposition des aires *rspq* est résultée une nouvelle élimination, et nous sommes arrivés enfin à comprendre les extrémités de toutes les poussées admissibles dans une dernière aire $r_4s_4p_6q_6$. Ces poussées définissent bien toutes les solutions d'équilibre.

Les *fig.* 11, 12, 13 donnent les constructions complètes effectuées sur diverses fractions d'une voûte en plein-cintre de 10 mètres d'ouverture; la *fig.* 14 donne la superposition des aires limites et la détermination des solutions d'équilibre. Nous reviendrons un peu plus loin sur la pratique

de ces applications; mais il nous a paru utile d'appeler immédiatement l'attention sur cet exemple, afin de donner une idée de la forme générale des courbes et de montrer la réalisation pratique des constructions indiquées.

CHAPITRE II.

TRACÉ DES COURBES DE PRESSION LIMITES.—CONCORDANCE AVEC LES FAITS PRATIQUES. — JOINTS FAIBLES ET JOINTS DE RUPTURE.

Tracé des courbes de pression limites.—Lorsque, suivant la méthode indiquée dans le chapitre précédent, on a déterminé toutes les solutions possibles d'équilibre, on est assuré que les diverses courbes de pression qui pourront se réaliser dans la voûte étudiée seront toutes définies par des pressions comprises dans l'aire limite construite au sommet. Cette aire affecte ordinairement la forme d'un quadrilatère mixtiligne tel que $r_4s_4p_6q_6$ *fig.* 5; elle subit dans les divers cas particuliers des transformations parmi lesquelles nous remarquerons la forme de triangle, comme en p_mr_nu *fig.* 6 ou comme en q_ns_mu *fig.* 7. Lorsqu'elle se réduit à un point r_np_m *fig.* 8, il ne nous reste plus qu'une solution d'équilibre.

Dans ces divers cas, nous pouvons tracer les courbes de pression possibles: si nous partons d'une poussée dont l'extrémité tombe dans l'aire $r_4s_4p_6q_6$ par exemple, la courbe ainsi définie n'exposera nulle part les matériaux à l'effort limite; si nous partons d'un point du contour de cette même aire, la courbe obtenue correspondra à l'effort limite sur un certain joint, sommet ou autre; si nous partons enfin d'un des sommets de ce contour, nous obtenons l'effort limite en deux points de la voûte, et nous devons rappeler que, dans ce dernier cas, il existe la correspon-

dance suivante entre les effets produits à la clef et sur un joint de la voûte :

Une poussée définie par un sommet noté r donne l'effort limite simultanément à l'extrados à la clef, à l'intrados sur le joint.

Une poussée définie par un sommet p donne l'effort limite simultanément à l'extrados à la clef, à l'extrados sur le joint.

Une poussée définie par un sommet q donne l'effort limite simultanément à l'intrados à la clef, à l'extrados sur le joint.

Une poussée définie par un sommet s donne l'effort limite simultanément à l'intrados à la clef, à l'intrados sur le joint.

Les *fig.* 5, 6, 7, 8, 9, donnent une idée de ces courbes de pression limites. Dans le cas de la *fig.* 5, les courbes définies par les poussées $r_4 s_4 p_6 q_6$ font atteindre la compression limite au sommet et à l'un ou à l'autre des joints $c_4 d_4$, $c_6 d_6$. Dans le cas des *fig.* 6 et 7, la poussée u donne l'effort limite simultanément sur les deux joints $c_n d_n$ et $c_m d_m$ dont les courbes limites rs, pq se coupent précisément en u; les poussées r_n et p_m, ou s_m et q_n donnent comme précédemment l'effort limite au sommet et sur un certain joint. Dans le cas de réduction à un point $r_n p_m$ *fig.* 8, la courbe définie par cette solution unique donne l'effort limite suivant trois joints, qui sont, dans l'exemple actuel, le sommet, la naissance et un joint intermédiaire $c_n d_n$. Le sommet pourrait être remplacé par un joint situé plus bas, si la solution de trois était définie par l'intersection en un même point unique courbes telles que $r_n s_n$, $p_l q_l$, $p_m q_m$, *fig.* 9.

Quant au cas où l'on ne trouve aucune solution, et où l'aire commune aux diverses surfaces élémentaires $rspq$ disparaît, nous n'avons plus à tracer de véritable courbe de pression, puisque l'équilibre est impossible dans les conditions où nous nous sommes placé. En effectuant les con-

structions habituelles, en partant de la poussée r_n par exemple, *fig.* 10, nous arriverions à un effort dépassant sur $c_m d_m$ l'effort voulu; la poussée r_n est située en effet au delà de la courbe limite $p_m q_m$. Remontant à un joint $c_{m'} d_{m'}$ dont la courbe $p_{m'} q_{m'}$ rencontrât la courbe $r_n s_n$, nous pourrions obtenir une fraction de voûte stable et une courbe de pression, abstraction faite de la partie inférieure de la construction.

Des remarques analogues aux précédentes pourraient être multipliées, en tenant compte de toutes les formes qu'affecte, dans des cas particuliers, l'aire renfermant les poussées admissibles. Mais les courtes considérations que nous venons de présenter font voir suffisamment comment se comportent d'une manière générale les courbes de pression d'équilibre, et en particulier les courbes correspondant à des solutions limites. Le tracé de ces dernières n'est pas essentiel pour reconnaître la stabilité de la construction, puisque cette stabilité dépend uniquement de l'aire commune à obtenir au sommet; mais il met nettement en évidence les parties de la construction où le travail des matériaux peut atteindre un maximum; il donne donc une notion précise des vrais points faibles de la voûte.

Concordance avec les faits ordinaires de la pratique.— C'est ici que nous devons indiquer la concordance des résultats obtenus par notre méthode avec les faits ordinaires de la pratique.

Ceux-ci sont suffisamment connus : on sait que, dans les conditions ordinaires de charges et de profils, les voûtes tendent à se séparer en quatre monolithes. Dans le cas d'une voûte en plein-cintre (*fig.* 16), la partie inférieure tend à être repoussée au dehors, la partie supérieure s'abaissant; un mouvement inverse tend à se produire dans les voûtes ogivales (*fig.* 17). Cette tendance au renversement s'accuse par une rupture de la cohésion au voisinage des arêtes les plus comprimées et une ouverture des

joints sur les arêtes les moins comprimées. Les joints où ces actions se manifestent sont généralement les joints voisins du sommet et des naissances et un joint intermédiaire BB′, auquel on donne le nom de *joint de rupture*.

Dans les voûtes qui, abandonnées à elles-mêmes, se trouvent dans de bonnes conditions de stabilité, les joints ne s'ouvrent nulle part, ou de simples fissures apparaissent aux point faibles; mais les pressions ou poussées n'atteignent sur aucun joint une intensité suffisante pour amener la rupture des voussoirs. Dans ce cas, il se réalise donc une courbe de pression qui n'expose nulle part les matériaux à un effort supérieur à celui qui amène la rupture.

Dans le cas où la voûte s'affaisse et tombe, aucune courbe de pression ne se produit, puisque l'équilibre n'existe à aucun instant.

Entre ces deux cas extrêmes peut se présenter celui d'une voûte dans laquelle l'équilibre serait strictement réalisé, l'effort limite étant atteint, mais non dépassé, aux trois points faibles; une courbe de pression limite et une seule est alors possible.

Lorsqu'on se trouve en présence d'une voûte projetée, la pratique même engage donc à vérifier sa stabilité, en cherchant si cette voûte admet au moins cette courbe limite.

Or cette courbe jouit de la propriété de donner, pour un plein-cintre, par exemple, l'effort limite à l'extrados au sommet, à l'intrados vers les reins, à l'extrados vers les naissances (*fig.* 16). La poussée qui la définit est donc une de celles que nous avons désignées par la lettre r dans l'exposé précédent, puisqu'elle donne simultanément l'effort limite en M et P; mais elle est aussi une des poussées que nous avons désignées par la lettre p, puisqu'elle donne simultanément l'effort limite en M et en N. Ainsi lorsque cette courbe se produit, la voûte admet une valeur commune pour la série des poussées limites r et la

série des poussées limites *p*. Cela revient à dire que l'ensemble des aires *rspq*, correspondant aux différents joints, admet un point commun tel que le point $r_n p_m$ de la *fig.* 8, vers la partie supérieure de $c_0 d_0$.

Comme on le voit, la condition de l'effort limite et de la rupture en trois points conduit à une partie des considérations et des constructions ci-dessus indiquées : détermination des valeurs successives de *r* et de *p* jusqu'au maximum de *r* et au minimum de *p*, comparaison de ces deux valeurs extrêmes. Pour l'identité de ces deux valeurs, nous nous trouvons en présence du cas limite d'équilibre avec effort de rupture en trois points; pour une valeur de *r* supérieure à celle de *p* (*fig.* 10), nous n'avons plus la possibilité de tracer cette courbe limite; toute courbe définie par une poussée donnant exactement l'effort d'écrasement à la clef conduirait à des pressions supérieures à cet effort en d'autres joints de la voûte. Enfin pour un maximum de *r* inférieur au minimum de *p*, les courbes définies par les poussées, comprises entre ces deux limites, et toujours situées sur le contour $c_0 \omega_0$, ne donneront plus l'effort de rupture dans l'étendue des profils; la voûte admettra une infinité de solutions d'équilibre.

Nous ne faisons, en somme, qu'envisager ainsi un des côtés de la question, en spécialisant le mode de rupture. Pour rétablir toute la généralité du problème, il faudrait considérer la possibilité d'ouverture des joints en sens contraire, et alors les pressions à considérer pour définir la courbe limite seraient *q* et *s*. Nous retomberions dans les développements présentés antérieurement.

Joints de rupture et joints faibles. — Nous avons rappelé à l'instant la notion du *joint de rupture*. Si une voûte en plein-cintre n'admet exactement qu'une poussée d'équilibre, valeur commune du maximum de *r* et du minimum de *p*, si notre aire commune du sommet se réduit à un point, l'effort limite se manifestera en jtrois oints, le

sommet, un joint vers les reins, un joint vers les naissances. Ce seront les trois joints faibles, et le joint situé vers les reins, joint tendant à s'écraser vers l'intrados, sera un véritable joint de rupture.

Si l'infériorité constante de r à p donnait la possibilité de solutions d'équilibre, nous ne trouvons plus dans la réalisation de ces diverses solutions la tendance à l'écrasement en trois points du profil; mais considérant la solution définie par la poussée r_4 (*fig.* 5), nous voyons qu'elle nous conduit à l'effort limite au sommet et suivant le joint c_4d_4; la solution p_6 donne cette même limite au sommet et aux naissances; ces deux solutions donnent donc l'une un joint vers les reins, l'autre un joint aux naissances où s'exercera au besoin, même avec la stabilité de la construction, un effort maximum. Ce seront deux joints faibles, qui pourront ne point porter dans toute leur étendue et où pourront se mani fester des fissures.

Quant au cas où le maximum de r dépasse le minimum de p, c'est-à-dire où l'effort limite est toujours atteint et même dépassé dans l'étendue de la construction, les poussées r ou p n'ont plus aucune valeur, puisque leur détermination reposait sur l'hypothèse de l'équilibre et que cet équilibre est impossible. Mais on peut, comme nous l'avons indiqué plus haut, restreindre par abstraction la voûte à une portion comportant une solution d'équilibre, laquelle indiquera encore les joints de rupture.

La généralité des constructions du chap. I nous permet d'étendre, sans qu'il soit besoin de longues considérations, les notions que nous venons d'indiquer sur le joint de rupture.

1° Toutes les fois que les solutions d'équilibre se réduiront à une seule, nous obtiendrons autant de joints faibles ou de rupture qu'il y aura de courbes limites rs, pq, $c\omega$, $d\omega$, passant au point définissant la seule poussée admissible. Il y aura tendance à l'effort limite en ces différents joints vers l'intrados ou vers l'extrados suivant que pour

chacun d'eux ce sera une des courbes *rs* ou *pq* sur laquelle sera située l'extrémité de la poussée. Ce seront de vrais joints de rupture.

2° Toutes les fois que les solutions d'équilibre seront en nombre illimité, il existera un certain nombre de solutions limites correspondant aux sommets de l'aire commune qui comprendra les poussées admissibles; ces solutions donneront l'effort limite sur les joints dont les courbes *rs* ou *pq* auront précisément déterminé par leur intersection les sommets en question. Ce seront des joints faibles.

3° Toutes les fois qu'il n'y aura aucune solution d'équilibre, les courbes limites *rs* ou *pq* n'auront plus de sens que pour des fractions de voûte; elles donneront une notion des parties où la rupture se produirait si la voûte était exécutée.

Remarques. — 1° L'étude générale des joints faibles fera connaître ce qu'on peut appeler la nature de la voûte, indiquant par la position des joints faibles et la situation sur ces joints des arêtes les plus comprimées si la voûte étudiée travaille à la façon des pleins-cintres ou des ogives.

2° L'étude des poussées *r* et leur passage par un maximum pour les pleins-cintres, l'étude des poussées *q* et leur passage par un minimum pour les ogives, sont les points essentiels à considérer pour les voûtes projetées dans les conditions ordinaires, lesquelles manifestent généralement la tendance à la rupture en quatre monolithes.

CHAPITRE III.

APPLICATIONS DE LA MÉTHODE.

Application de la méthode. Limite admise pour les pressions. — Dans les applications à faire de la méthode ci-dessus exposée, nous pourrons ou bien considérer une voûte

déjà construite et stable, et chercher les conditions auxquelles satisfait l'équilibre réalisé, ou bien avoir à projeter un arc en maçonnerie et à rechercher les solutions d'équilibre que le système comportera. Dans les deux cas, les constructions seront les mêmes ; la limite de *n* kilogramme admise par centimètre carré pourra seule être différente : pour une voûte construite et stable dont on étudie les conditions de stabilité, il convient de choisir pour cette limite celle à laquelle pouvaient effectivement s'écraser les matériaux ; pour une voûte projetée, on sait que la prudence engage généralement à réduire la limite effective de résistance et à admettre pour la cohésion une valeur hypothétique qui n'est que le dixième environ de la vraie valeur ; nous chercherons les solutions d'équilibre compatibles avec cette limite réduite. — Nous reviendrons un peu plus loin sur les conséquences qu'on peut tirer des valeurs diverses attribuées à *n*.

Série des opérations à effectuer pour vérifier la stabilité d'une manière générale. — Rappelons la série des opérations que comporte la vérification de la stabilité faite d'après les principes exposés jusqu'ici :

1° Détermination des poids des diverses portions de voûte avec leurs surcharges ; détermination des verticales contenant leurs centres de gravité respectifs. Ce sont les opérations préliminaires nécessaires pour toute vérification.

2° Tracé des courbes $\alpha\beta$, $\gamma\delta$ ou $\alpha\gamma$, $\beta\delta$, limitant les poussées et pressions compatibles avec l'équilibre, quelle que soit la résistance à admettre pour les matériaux.

3° Tracé des courbes *cωd*, limitant les pressions compatibles avec la résistance propre des matériaux.

4° Superposition des deux séries de courbes précédentes et détermination des aires *rspq* au sommet.

5° Superposition de ces aires et recherche de la surface commune, surface comprenant les extrémités des lignes représentatives de toutes les poussées admissibles.

6° Comme complément, tracé des courbes de pression limites, correspondant aux sommets de la surface commune, et détermination des parties faibles de la voûte.

Remarques sur les diverses opérations. Pratiques, simplifications. — Reprenons cette série d'opérations et faisons quelques observations sur chacune d'elles.

1° La détermination des poids et des verticales des centres de gravité peut se faire par des constructions géométriques ou par des calculs fort simples de moments. Nous ne dirons rien de ces procédés bien connus de tout le monde; nous ferons observer que, pour notre compte, nous trouvons avantage à débarrasser les dessins des constructions géométriques donnant les centres de gravité, constructions qui n'ont rien à faire dans le problème même de la stabilité.

2° et 3°. Nous avons indiqué antérieurement le tracé des courbes $\alpha\beta$, $\gamma\delta$ et celui des courbes $c\omega d$; nous avons défini leur nature géométrique. Elles se déterminent par points avec une extrême facilité par la méthode de M. Méry. La note placée à la fin de ce mémoire donne quelques indications sur leurs propriétés, indications qui pourraient au besoin guider dans leur tracé d'ailleurs si simple.

4° Quant à la détermination des aires *rspq* sur le sommet, nous rappellerons que les points r et s sont situés à l'intersection de la ligne $c_0\omega_0 d_0$, (*fig.* 4, Pl. 132; *fig.* 24, Pl. 133), avec l'arc $\rho\sigma$ obtenu en ramenant au sommet l'arc $\rho'\sigma'$ déterminé sur le joint *cd* (*); les points p et q sont situés à l'intersection de la même ligne avec l'arc $\varpi\chi$, obtenu en ramenant au sommet l'arc $\varpi'\chi'$.

Lorsqu'on considère une voûte complète, le tracé de l'aire limite des pressions RSPQ (*fig.* 4) n'est point utile à effectuer et les constructions se réduisent à celles de la *fig.* 24.

(*) Voir la note B pour cette construction inverse de la construction habituelle de M. Méry et la note C sur les courbes *rs*, *pq*.

Le tracé des courbes $\alpha_1\beta_1$, $\gamma_1\delta_1$, $\alpha_1\gamma_1$, $\beta_1\delta^1$ (*fig.* 4) n'est même point indispensable pour ramener au sommet la courbe *cωd* du joint *cd*; mais ce tracé a le double avantage : 1° d'indiquer sur l'arc *cω* les portions $\rho\,\sigma'\omega'\chi'$ vraiment seules intéressantes à reporter au sommet; 2° de donner des limites extrêmes, indépendantes de la résistance, qui permettront ou d'étudier la voûte en attribuant aux matériaux une résistance indéfinie ou de diriger dans les variations qu'on pourra faire subir arbitrairement à la limite imposée à cette résistance.

5° et 6° La superposition des aires-limites et le tracé des courbes de pression correspondantes sont une conséquence des constructions antérieures. Dans le cas où l'aire commune aux aires-limites serait considérable, ou, ce qui revient au même, lorsque les courbes de pression limites laisseraient un espace fort grand pour le tracé des courbes d'équilibre, on pourrait conclure que la construction est trop stable et l'on se rapprocherait plus ou moins par des changements de profils de la forme-limite qui ne comporterait exactement qu'une solution d'équilibre compatible avec la résistance des matériaux.

En somme, opérations préliminaires pour la détermination des poids et des centres de gravité, construction des courbes-limites et comparaison des résultats obtenus pour les divers joints, voilà le résumé de nos constructions. L'étude générale de la voûte se trouve ainsi reportée tout entière au sommet, les constructions faites sur les joints n'ayant servi que d'intermédiaire pour arriver aux courbes-limites tracées à la clef.

Il n'est plus rigoureusement besoin de tracer des courbes de pression dans toute l'étendue de la voûte, ni de procéder sur les différents joints à des vérifications de grandeur des composantes normales; nous savons, sans les tracer, quelles courbes donnerait l'effort-limite en un ou plusieurs points de la construction, et nous connaissons la situation de ces points.

Il est du reste bien évident que, pour des voûtes tout à fait simples, dont on ne veut faire qu'une étude peu détaillée, on peut restreindre les constructions à un aussi petit nombre de joints que l'on voudra, en consentant à se priver de la précision d'une étude plus complète. C'est ainsi que pour un plein cintre on pourra, comme première approximation, se borner au sommet, aux naissances, à un joint ou deux situés entre 20 et 35 degrés au-dessus de l'horizontale, position indiquée souvent par l'expérience pour le joint de rupture. Pour un arc de cercle, on prendra le sommet, la naissance de l'arc, et le pied de la culée par exemple. On pourra en même temps se contenter d'étudier un seul mode possible de rupture ou de travail-limite, c'est-à-dire ne considérer que les pressions-limites *p* et *r* ou *s* et *q*.

Dans tous les cas. les premières constructions effectuées indiqueront sur quelles portions de la voûte doivent porter les vérifications détaillées.

Nous devons faire remarquer que, toutes les fois que la voûte a un joint horizontal, toutes les résultantes auront forcément sur ce joint pour composante normale le poids de la demi-voûte depuis le sommet jusqu'au joint considéré; de là de notables simplifications, les aires $\alpha\beta\gamma\delta$, *rspq*, sur le joint, se réduisant à une ligne horizontale passant par le sommet de la ligne représentative du poids (*fig.* 13), et les courbes *rs*, *pq* du sommet se confondant avec des courbes de la série $\alpha\beta$, $\gamma\delta$.

Extension des constructions aux piles et culées. — Les constructions donnant les poussées-limites doivent évidemment être étendues aux culées et piles, si l'on veut avoir une notion complète de la stabilité de l'ouvrage.

Pour une culée, nous n'avons rien de nouveau à signaler; chacun de ses joints, tel que AB (*fig.* 30, Pl. 133), comportera les mêmes constructions que ceux de la voûte. Nous pourrons simplement pour un joint CD, reposant sur du

béton, par exemple, prendre comme pression limite n sur ce joint celle qui correspond à la résistance de la nouvelle matière comprimée. Nous pourrons de même sur EF prendre une autre résistance correspondant à la nature du sol de fondation.

Pour une pile, il faudrait tenir compte de chacune des demi-voûtes qui viennent retomber en $c_n d$, $c'_n d$ (*fig.* 29). La question se complique; on peut la résoudre, au moins partiellement, de la manière suivante:

Chacune des demi-voûtes est étudiée isolément depuis le sommet jusqu'aux joints de naissance $c_n d$, $c'_n d$. On arrive, d'après la méthode ordinaire, aux deux limites $r_g p_g$, $r_d p_d$, par exemple, pour les solutions d'équilibre. Nous prendrons les deux résultantes $r_g p_d$; nous les combinerons, en tenant compte du voussoir commun $c_n c'_n c_m d_m$, et nous obtiendrons une résultante A, qui sera, vers la gauche, la position extrême que comportera la série des résultantes compatibles avec l'équilibre simultané des deux voûtes. Chacune de ces résultantes a, du reste, pour valeur la somme des poids des demi-voûtes et du voussoir commun. La combinaison de p_g et r_d nous donnera la limite AA' vers la droite. Ainsi, le rapprochement de toutes les solutions d'équilibre de chacune des deux voûtes limite entre A et A' toutes les positions résultantes possibles sur $c_m d_m$. Nous construirons alors la courbe limite $c_m \omega_m d_m$. Si les deux points A et A' tombent dans l'intérieur de cette courbe, la construction est dans de bonnes conditions, puisque la réalisation d'une quelconque des combinaisons d'équilibre de la partie supérieure n'exposera pas la pile à un effort dépassant la limite imposée; si, au contraire, un des points A, A', ou tous les deux sortaient de la courbe $c_m \omega_m d_m$, il conviendrait d'augmenter la surface $c_m d_m$. Nous avons, du reste, la même facilité que pour les culées à supposer les limites de résistance variables suivant les matériaux en contact à diverses hauteurs dans le massif

constitutif de la pile. On généralisera facilement les quelques indications que nous donnons sur ce point.

Exemples. — Nous donnons, dans les *fig.* 14, 18, 19, Pl. 132; *fig.* 26, 27, 28, Pl. 133, quelques exemples d'application de la méthode.

I. L'exemple de la *fig.* 14 est celui d'une voûte en plein cintre de 10 mètres d'ouverture, avec une épaisseur de $0^m.60$ à la clef. La limite admise pour la résistance des matériaux est de 6 kilogrammes par centimètre quarré. La densité des maçonneries est de 2 400 kilogrammes; celle des surcharges, de 1 500 kilogrammes. Le joint faible, indiqué par la solution r_4, forme avec l'horizontale un angle de 28 degrés. Les poussées-limites ont pour valeur : solution r_4, 11 200 kilogrammes; solution s_4, 12 400 kilogrammes; solution p_6, 12 600 kilogrammes; solution q_6, 13 200 kilogrammes.

II. L'exemple de la *fig.* 28 est celui d'un pont d'une assez grande hardiesse. Il est en arc de cercle de $43^m.48$ de portée, avec une épaisseur de $1^m.14$ seulement à la clef; il est construit en briques d'excellente qualité. La limite imposée à la résistance, dans l'épure, est de 20 kilogrammes par centimètre quarré. La densité des briques est de 2 200 kilogrammes; celle des surcharges, de 1 600 kilogrammes. La solution p a pour valeur 68 400 kilogrammes; la solution r, 53 500 kilogrammes; la solution s (courbe-limite non tracée sur l'épure), 55 500 kilogrammes. Nous avons constaté qu'en faisant descendre la résistance à 14 kilogrammes par centimètre quarré, l'équilibre ne pouvait plus se réaliser.

III. Nous avons pris dans les *fig.* 26 et 27 un arc identique à celui que Boistard avait soumis à l'expérience; c'est un plein cintre de $2^m.60$ d'ouverture, formé de voussoirs en briques de $0^m.11$ d'épaisseur. Chacune des portions formant un des voussoirs de l'épure pèse $7^k.78$.

En étudiant l'arc ainsi défini, abandonné à lui-même et

considérant d'abord une résistance illimitée (tracé des courbes $\alpha\beta$, $\gamma\delta$), nous trouvons que l'équilibre est impossible, la courbe $\gamma_{12}\delta_{12}$ étant située tout entière au-dessous de la courbe $\alpha_8\beta_8$ (*fig.* 26). C'est en effet ce que l'expérience a montré; nos constructions nous donnent du reste comme indications sur les joints où se feront les ruptures le joint n° 8, faisant un angle de 25 à 30 degrés avec l'horizontale, et l'expérience a donné un peu plus de 26 degrés.

Nous avons chargé les reins (*fig.* 27) de manière à reproduire une deuxième expérience de Boistard. L'équilibre est devenu possible; en faisant descendre la résistance à 5 kilogrammes par centimètre carré, on a encore les solutions auxquelles correspondent les courbes-limites tracées sur l'épure. L'expérience avait du reste confirmé la stabilité dans ce cas.

IV. Pour avoir simplement une idée des solutions ogivales, nous avons considéré (*fig.* 18 et 19) un arc composé d'éléments identiques à ceux des expériences de Boistard. Sans charge additionnelle, l'arc comportait des solutions d'équilibre, comme l'indique la *fig.* 18 où la résistance est supposée du reste illimitée; une des courbes-limites, celle qui est définie par l'intersection ε des courbes $\gamma_1\delta_1$ et $\alpha_6\beta_6$, donne déjà une solution du genre de l'ogive, effort-limite vers l'extrados au joint n° 1 et vers l'intrados au joint n° 6. En ajoutant un poids de 50 kilogrammes vers le joint n° 4, l'aire-limite des pressions se resserre; l'effort-limite est accusé sur le joint n° 2 et sur le joint n° 8 (*fig.* 19). En augmentant encore la surcharge, l'effort-limite finit par se manifester à la clef, aux naissances, vers le joint n° 3 (courbe-limite pointillée); l'équilibre devient impossible, même avec une résistance infinie. La considération d'une résistance finie ne ferait que resserrer les limites et amener plus rapidement à l'impossibilité de l'équilibre.

CHAPITRE IV.

ÉTUDE COMPARATIVE DES VOUTES. — RÉSUMÉ.

Étude comparative des voûtes. Coefficient de stabilité. — La possibilité d'une étude vraiment comparative des diverses voûtes ressort de l'exposé qui précède; les principes et les constructions se présentent en effet avec un caractère évident de généralité. Considérant la résistance réelle des matériaux des divers types, nous sommes en mesure de déterminer toutes les solutions d'équilibre qu'ils admettent effectivement et dont l'une ou l'autre s'est réalisée. Nous pouvons encore réduire arbitrairement, mais dans un même rapport pour tous les exemples, la résistance pratique, et comparer ainsi toujours à un même point de vue les constructions stables.

La limitation de toutes les solutions, l'écart constaté entre les solutions extrêmes, le tracé des courbes de pression limites serviront de mesure au degré de stabilité.

Nous indiquerons même à ce point de vue une nouvelle étude, qui sera un complément utile des précédentes. Supposons qu'après avoir reconnu l'existence de solutions d'équilibre compatibles avec la résistance effective n des matériaux, nous fassions varier arbitrairement cette résistance. Les courbes-limites des poussées varieront en même temps. Pour une certaine valeur n' de n, nous pouvons arriver à ne plus trouver qu'une solution d'équilibre; l'aire renfermant les extrémités des poussées-limites se réduira à un point. Pour une valeur de n' un peu inférieure, toute solution d'équilibre disparaîtrait. Donc, en supposant aux matériaux la résistance n', notre construction cesserait d'être stable; comparons cette valeur hypothétique n' à la valeur vraie n. Pour un écart notable, nous pourrons conclure que la voûte en question est dans d'excellentes conditions de



stabilité, puisque la résistance-limite des matériaux pourrait descendre notablement au-dessous de sa valeur réelle, sans que la voûte cessât d'admettre des solutions d'équilibre. On pourrait même, pour une valeur trop petite du rapport $\frac{n'}{n}$, conclure que la construction est trop stable et qu'avec les matériaux employés on pourrait réaliser une économie sur la masse de la maçonnerie.

La détermination de ce rapport pour un certain nombre de types peut être un utile renseignement pour guider dans les projets. C'est une sorte de coefficient de stabilité, donnant la mesure de la hardiesse des ouvrages.—Nous avons appliqué ces idées à l'exemple de l'arc de cercle (*fig.* 28); nous avons trouvé pour valeur-limite n' 15 à 16 kilog. par centimètre carré; en admettont pour résistance vraie n 150 kilog., on aurait $\frac{n'}{n} = \frac{15}{150} = \frac{1}{10}$; en admettant pour n 90 kilog. seulement, on aurait $\frac{n'}{n} = \frac{1}{6}$.

Résumé. — Jetons un coup d'œil sur l'ensemble de cette note et résumons la marche suivie.

Nous avons montré le rôle que jouent les courbes de pression dans l'étude de la stabilité des constructions; nous avons constaté qu'à la grande rigueur la détermination d'une seule courbe de pression ou d'une seule solution d'équilibre pouvait suffire pour donner quelque assurance au point de vue de l'équilibre, mais que cette courbe unique, obtenue par tâtonnements, ne donnait qu'une idée imparfaite de la stabilité.

Nous avons par suite généralisé le problème et cherché à déterminer *toutes les solutions d'équilibre* que comportait la voûte. Par une élimination faite à l'aide de quelques courbes, nous avons limité sur la clef toutes les poussées admissibles; du même coup nous avons défini les points faibles

de la construction, en procédant d'une manière générale et sans rien préjuger sur la situation de ces points ou le mode de rupture.

Nous avons ensuite montré la concordance des résultats avec les faits ordinaires de la pratique; nous avons insisté sur les joints de rupture et rappelé les deux modes de travail des matériaux qui caractérisent les deux classes de voûtes, plein cintre et ogive.

Nous avons fait quelques remarques sur les différentes constructions à effectuer, sur les simplifications qu'elles comportent, sur l'usage restreint de la méthode, usage que l'on peut faire en définissant *à priori* certaines conditions et spécialisant d'avance les résultats d'une manière arbitraire.

Nous avons montré enfin l'application qu'on pouvait faire de notre méthode pour une étude comparative des constructions, et nous avons indiqué un coefficient qui peut donner une idée vraie de la hardiesse de l'ouvrage.

Nous ne nous dissimulons pas qu'en pratique les soins d'exécution et les détails de main-d'œuvre peuvent avoir aux yeux des constructeurs infiniment plus de valeur que les remarques un peu théoriques que nous avons présentées. Mais nous croyons qu'il n'est jamais inutile d'étudier avec quelque soin des problèmes se rattachant plus ou moins directement aux faits d'expérience. L'emploi, si généralement répandu, des courbes de pression donnera peut être quelque intérêt à nos recherches.

NOTES.

REMARQUES GÉOMÉTRIQUES.

NOTE A.

Propriétés des courbes-limites des poussées et pressions.

I. *Courbes* $\alpha\beta$, $\gamma\delta$, *compatibles avec l'équilibre et une résistance illimitée.* — Les courbes $\alpha\beta$, $\gamma\delta$, tracées à la clef, sont des arcs d'hyperbole. On a en effet constamment entre la poussée N, sa distance verticale ξ à l'horizontale *am* (*fig.* 20, Pl. 133), le poids π de la voûte c_0d_0 *cd* et sa distance $K = am$ au point *a*, la relation

$$N\xi = \pi K,$$

équation d'une hyperbole équilatère ayant pour asymptotes la verticale c_0d_0, et l'horizontale passant par le point *a*. Toutes les hyperboles, telles que $\alpha\beta$, SQ, $\gamma\delta$, correspondant aux diverses positions du point *a* sur *cd*, ont pour asymptotes Oc_0d_0, et les diverses horizontales passant par les points tels que *a* pris sur *cd*.

Quant à la pression résultante, telle que GP, on a :

$$GP = \frac{\pi}{\cos\beta} = \frac{G'P}{\sin\beta},$$

β étant l'angle de la ligne GP avec la verticale.

Sa composante normale a pour valeur : $\pi\frac{\cos(\gamma-\beta)}{\cos\beta}$. L'ensemble des composantes normales, formant une courbe telle que $\alpha\gamma$, c'est-à-dire correspondant à des poussées passent toutes en c_0, est limité par une courbe hyperbolique $\alpha\gamma$ L'. La série des courbes analogues a pour asymptotes la ligne OL du joint et les diverses normales entre HH' et LL'. Toutes ces courbes se coupent en un même point K, situé sur la normale au joint élevé à l'intersection de OL et de la verticale du centre de gravité GG'.

II. *Courbes* $\omega\omega d$ *des pressions compatibles avec une résistance donnée.* — Les courbes-limites se composent, pour chaque bran-

che, d'une droite et d'un arc d'hyperbole. Ces branches ont en effet respectivement pour équations, de c en m (*fig.* 3, Pl. 132):

$$\frac{2}{3}N = nx; \qquad (1)$$

de m en ω:

$$2N - \frac{3}{f}Nx = \frac{nf}{2}. \qquad (2)$$

Les arcs d'hyberbole se raccordent avec les portions de droites, car le coefficient angulaire de la tangente $\frac{dN}{dx}$ devient $\frac{3}{2}n$ lorsqu'on met pour x la valeur $\frac{1}{3}f$ dans son expression générale: $\frac{nf^2}{2}\frac{3}{[2f-3x]^2}$. Au point le plus élevé ω, ce coefficient devient $4\left(\frac{3}{2}n\right)$ ou $6n$. L'inclinaison de la tangente en ce point sur la normale médiane est alors le quart de l'inclinaison de la tangente en m. Ces deux inclinaisons sont du reste constantes, quel que soit le joint considéré.

III. *Variation de forme de ces deux séries de courbes en suivant les divers joints d'une voûte.* — Les courbes $\alpha\beta$, $\gamma\delta$ viennent couper presque normalement l'horizontale lorsqu'elles correspondent aux joints de naissance. A mesure que le joint considéré se rapproche du sommet, elles s'étendent, comme on le voit en suivant les *fig.* 13, 12, 11. Elles ont toujours leurs asymptotes verticales et horizontales; il y a tendance à se confondre avec ces asymptotes (*fig.* 25, Pl. 133), ce qui a lieu exactement au moment où le joint vient se confondre avec la verticale c_0d_0 du sommet; l'aire $\alpha\beta\gamma\delta$ devient alors tout l'espace compris entre les deux normales c_0, d_0.

Les variations de forme des courbes $c\omega d$ n'offrent rien de remarquable.

Note B.

Construction inverse de M. Méry.

Pour effectuer la construction inverse de M. Méry, on peut employer une des méthodes suivantes:

1° aR étant la composante normale donnée (*fig.* 21, Pl. 133), menons par R une parallèle au joint cd; l'extrémité de la résultante

devra se trouver sur cette ligne. Menons par a la verticale aP et une longueur aP représentant le poids de la portion de voûte prenons c_0d_0cd; aP sera la projection verticale de la résultante cherchée; donc l'extrémité de celle-ci sera sur l'horizontale passant par P. Le point d'intersection M de cette horizontale et de la ligne RM sera donc l'extrémité de la résultante. PM sera la poussée correspondante que l'on ramènera facilement au sommet en prolongeant la direction aM de la résultante jusqu'à son point d'intersection N avec la verticale GG′ du centre de gravité; SQ, égale à PM, sera la poussée cherchée.

2° Prenons sur une verticale, Od_0 par exemple, une longueur OP_n (*fig.* 22), représentant le poids de $c_0d_0\,c_nd_n$. Menons OR′ perpendiculaire à la direction Od_n du joint considéré; projetons P_n en P'_n. Soit maintenant aR la composante normale donnée; portons-la à partir de P'_n en P'_nR'; ramenons le point R′ en S_n sur l'horizontale passant par O. P_nS_n sera la résultante en grandeur, OS_n la poussée. Il ne reste plus qu'à mener par a une parallèle à P_nS_n et à achever la construction comme précédemment. Mêmes constructions pour le joint suivant c_rd_r. On emploiera l'une ou l'autre méthode, suivant les cas. Il suffit de renverser les constructions pour obtenir des procédés simples de réalisation de la méthode directe de M. Méry.

NOTE C.

Courbes rs, pq, *formant le contour des aires-limites.*

Les arcs rs *ou* pq, qui nous ont servi dans le cours de ce mémoire à limiter définitivement les poussées, appartiennent à des courbes qu'on obtiendrait complètes en effectuant la construction inverse de M. Méry pour tous les points des lignes $c\omega d$ des divers joints. Pour un joint tel que cd, on aurait (*fig.* 23, Pl. 133) une courbe telle que ABCDE, qu'on pourrait appeler la déformée de $c\omega d$. Chacun des arcs AC ou AB vient se terminer en A, point correspondant au sommet ω du joint.

En se reportant à la première méthode indiquée à l'instant pour effectuer la construction inverse de M. Méry, on remarquera que si l'on mène par le point P, extrémité de la ligne NP représentative du poids de c_0d_0cd une parallèle MM′ à cd, la branche ABC tout entière correspondra à des points de $c\omega d$ situés au-dessous de MM′

entre T ou T' et ω. Les points situés au-dessus de TT' donneraient une branche parasite DE, correspondant à des poussées négatives ou extensions.

Lorsqu'on se rapproche du sommet, les arcs *rs*, *pq* affectent les formes indiquées dans la *fig.* 25. Le poids NP (*fig.* 23) tend alors vers zéro, en même temps que NR tend à devenir horizontale. On arrive en se rapprochant indéfiniment du sommet à reproduire la courbe $c_0 \omega_0 d_0$, ce qui était facile à prévoir *à priori*.

Note D.

Contour-limite des courbes de pression.

On pourrait déterminer pour chaque joint le pied des résultantes dont les composantes normales se terminent en r et p (*fig.* 12, Pl. 132). On obtiendrait deux points tels que ρ et ϖ. En joignant tous ces points par deux courbes $c_0\mu$, $d_0\nu$ (*fig.* 15), on aurait deux contours entre lesquels seraient forcément comprises toutes les courbes de pression possibles, et qui donneraient quelque idée des excès d'épaisseur des profils.

Paris, 18 août 1866.

N° 143

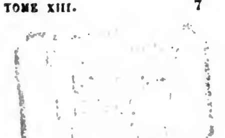
NOTE

Sur le chauffage et la ventilation du théâtre de Nantes.

Par M. LECHALAS, ingénieur en chef des ponts et chaussées.

Nous avons exécuté, en 1865, une restauration complète de la salle du théâtre de Nantes et d'une partie de ses dépendances. Cette circonstance a été utilisée pour une installation nouvelle d'appareils de chauffage, en remplacement d'anciens calorifères mixtes, à air chaud et eau chaude, tout à fait défectueux.

Le système de chauffage à l'air chaud devait être préféré, comme étant le plus économique de tous pour ce qui concerne l'installation. En outre, il présente sur le chauffage à l'eau chaude l'avantage d'une moindre dépense journalière, et il n'y a pas à se préoccuper des fuites, comme dans le système de chauffage à la vapeur. Mais, pour renouveler l'air, il ne suffit pas d'avoir un moyen d'entrée, il faut aussi des orifices d'évacuation. On avait d'abord pensé à faire sortir l'air vicié par un large orifice à établir au-dessus du lustre, en utilisant l'appel produit par la chaleur de cet appareil. Mais on n'aurait pas obtenu, par ce moyen, un renouvellement sérieux à la quatrième galerie, où les miasmes auraient continué à séjourner, tandis que l'air affluent de la scène se fut engouffré sans utilité dans la cheminée centrale. L'air méphitique du pourtour supérieur eut été, tout au plus, animé d'un mouvement de remous, analogue à celui de l'eau au droit des murs en retour des culées très-saillantes.



Nous n'avons donc admis l'orifice au-dessus du lustre qu'à titre de voie d'écoulement accessoire, en réduisant sa section, tandis que des issues présentant une surface considérable ont été disposées derrière les spectateurs des quatrièmes, à distance suffisante pour qu'il n'en résultât pas de vitesses gênantes (*). *C'est la grande superficie de ces ouvertures, formant une ceinture continue autour du plafond de la salle, qui constitue le caractère original du système.*

Une commission spéciale a été chargée, sur notre demande, de procéder à la réception des travaux exécutés par l'entrepreneur Boyer, à qui l'on doit en grande partie les dispositions adoptées. Le rapport de cette commission est ainsi conçu :

Nantes, le 23 juin 1866.

Les appareils pour le chauffage et les travaux concernant la ventilation du théâtre de Nantes ont été faits par M. Boyer, sous la direction de M. Lechalas, ingénieur en chef des ponts et chaussées.

Une commission composée de MM. Brissonneau, constructeur de machines, membre du conseil municipal; Bobierre, directeur de l'École des sciences; Labresson, professeur de physique au lycée impérial, et Lorieux, ingénieur des mines, rapporteur, a procédé les 11 et 12 mars à la réception provisoire des appareils.

Dans son rapport du 13 mars, elle a constaté :

1° Qu'avec une température de 5 à 6 degrés au dehors, la température obtenue avant la représentation était de 13 degrés dans le vestibule, de 15 à 16 degrés sur la scène (sauf

(*) Le mur du fond de la salle s'arrête sous la quatrième galerie; il est remplacé, dans la hauteur de ce dernier étage, par des poteaux très-espacés. Le couloir se trouve ainsi réuni à la galerie supérieure, ce qui a rendu facile l'établissement des orifices à une distance suffisante des spectateurs. Du reste, la superficie des orifices est si considérable qu'on aurait pu les rapprocher du public, la vitesse étant en raison inverse de la section.

dans le voisinage du magasin des décors dont la porte donnait un courant d'air glacial), de 15 à 17 degrés dans les couloirs des loges d'artistes et dans la salle;

2° Que pendant la représentation la température était de 19 degrés aux premières, et de 21 degrés aux troisièmes et aux quatrièmes;

3° Que la ventilation était satisfaisante, que toutefois aux troisièmes les émanations de la salle donnaient une odeur sensible; qu'aux quatrièmes, malgré l'affluence des spectateurs, *il n'y avait pas d'odeur méphitique appréciable, tandis qu'avant les travaux cette partie de la salle était pour ainsi dire inhabitable.*

La commission a demandé :

1° Que des tambours fussent installés aux portes extérieures du vestibule et que le pourtour des fenêtres fût garni de bourrelets;

2° Que le magasin des décors fût chauffé d'une manière spéciale (*);

3° Que des orifices fussent établis pour ventiler les troisièmes en les mettant en communication avec les quatrièmes, où le renouvellement de l'air ne laisse rien à désirer (**).

La commission s'est réservé, en outre, de continuer ses expériences et de réclamer au besoin les modifications qui lui sembleraient nécessaires après un examen plus détaillé.

Elle a consigné, dans le présent rapport, le résultat de ses observations subséquentes, observations qui ne l'ont amenée à aucune proposition nouvelle. Les améliorations indiquées ci-dessus sont d'ailleurs en dehors du marché de M. Boyer.

Le chauffage s'opère au moyen de trois calorifères à air chaud, R, R' et *r* (Pl. 133, *fig.* 31) disposés, les deux pre-

---

(*) On vient d'établir, dans ce but, une prise sur le petit calorifère (décembre 1866).

(**) Il sera facile de réaliser cette amélioration; mais on ne pourra le faire que lors d'une interruption un peu prolongée des représentations.

miers dans les caves et à peu près symétriquement de chaque côté de la rampe; le troisième près de la conciergerie, à l'entrée du couloir qui établit la communication entre les deux côtés de la scène, derrière les coulisses. Ce dernier calorifère est un petit appareil qui remplit le but spécial de chauffer le couloir où l'air chaud se précipite par une très-large bouche pratiquée au-dessus de la porte.

On est parti de ce principe : que pour chauffer et ventiler en même temps une salle de spectacle, il suffisait de chauffer le vestibule, la scène et les couloirs par lesquels l'air trouve accès, et de donner issue, par le pourtour de la partie supérieure de la salle, à l'air vicié, aux émanations et aux gaz qui se produisent dans une enceinte éclairée et remplie de spectateurs. Dans l'intérieur même de la salle il n'y a pas de bouches de chaleur; cinq petits orifices, d'importance très-secondaire, ont été seulement ménagés dans le plancher de l'orchestre.

La disposition des conduits des calorifères R, R', est représentée sur le plan (*fig.* 31, Pl. 133) annexé au présent rapport.

Chaque calorifère se compose d'une cloche en fonte, à l'intérieur de laquelle se trouve la grille du foyer, et qui est surmontée de deux couronnes creuses disposées l'une au-dessus de l'autre et reliées par une série de tubes à section circulaire aplatie.

Les gaz de la combustion et la fumée, qui s'échappent par la partie supérieure de la cloche, sont forcés de passer de la couronne inférieure à la couronne supérieure par les tubes, qui les soumettent à un brassage énergique, déterminent la combustion complète et brûlent la fumée. Les deux couronnes sont cloisonnées de trois en trois tubes, de manière que l'écoulement des gaz se distribue entre les tubes suivant une proportion régulière. Les produits gazeux de la combustion passent de la deuxième couronne dans la cheminée.

L'appareil formé par la cloche et les deux couronnes en fonte est enveloppé d'une maçonnerie à environ 0m.40 de distance. Il y a ainsi autour de l'appareil une gaîne où l'air, admis par des ouvertures spéciales, vient se chauffer en léchant les parois de la fonte et de là se rend dans les conduits du calorifère.

Chacun des calorifères envoie l'air chaud dans deux conduits principaux, AA', DD' pour le premier, BB' et MM' pour le second. Les conduits en maçonnerie DD' et MM' chauffent la scène et ses dépendances; les conduits AA' BB' s'embranchent sur le même conduit E''E' EEE qui fait le tour de la salle au-dessous du couloir du rez-de-chaussée. Une communication secondaire est établie entre les deux calorifères par le petit tuyau A'*cc'* *c''* *c*B'.

Les prises d'air du calorifère sur la rue Corneille sont au nombre de deux; leur section cumulée est de 2mq.33. La section, côté Molière, est encore plus considérable.

Les ouvertures ménagées dans les enveloppes en maçonnerie de chaque calorifère sont au nombre de cinq, représentant une surface de plus de 1 mètre quarré. Elles sont garnies de fermetures amovibles.

Le conduit DD' du calorifère R se divise en trois embranchements qui amènent l'air chaud aux bouches *l*, *l*, *l* de la scène et à la bouche *g*, dans le foyer des chœurs. Trois tuyaux verticaux communiquent directement avec le calorifère par un embranchement spécial qui passe au-dessus de celui qui amène l'air chaud à la scène : deux d'entre eux s'ouvrent au premier et au deuxième étages à l'entrée des couloirs des loges d'artistes par les bouches *g'* et *g''*; le troisième par la bouche *g'''* chauffe l'appartement de l'inspecteur du théâtre.

Les clefs et registres sont disposés de façon qu'on puisse chauffer séparément la scène, la salle ou les loges d'artistes.

Tous les conduits d'air chaud sont en rampe, des appareils aux orifices.

Le conduit MM′ a 1m.25 sur 0m.80, c'est-à-dire 1 mètre quarré de section; sur ce tronc s'embranchent: 1° trois conduits en fonte de 0m.30 de diamètre pour chauffer les loges d'actrices; 2° un peu plus loin (section réduite à 0m.40 sur 0m.60) divers branchements pour les loges et les foyers de choristes, bouches de 0m.23 sur 0m.12.

La conduite vers le péristyle a 1mq.20 de section au départ de chaque calorifère, et diminue graduellement jusqu'aux extrémités du couloir, où elle n'a plus que 0m.80 sur 0m.80.

Cette section est conservée pour le tronc commun sous l'escalier des premières, et se réduit à 0m.45 sur 0m.45 pour chacun des branchements qui aboutissent aux bouches du péristyle. Le tronc commun alimente encore les deux bouches de 0m.20 sur 0m.20 de l'escalier des premières. De petits branchements de 0m.25 sur 0m.25 conduisent l'air chaud aux deux bouches placées près des portes entre le péristyle et le parterre; au premier étage, à la bouche de l'antichambre du maire; à la bouche du salon du maire; à deux bouches dans le couloir, etc.; au deuxième étage, à une bouche de chaque côté dans le couloir (0m.23 sur 0m.15); au troisième étage, à une bouche de chaque côté de la porte d'entrée du couloir; au quatrième étage, à une de chaque côté de la porte d'entrée du couloir. Ces dernières ont été reconnues inutiles et condamnées.

La surface de chauffe de chaque grand appareil est de 45 mètres quarrés, ce qui donne 90 mètres quarrés pour les deux; celle du petit calorifère est de 18 mètres quarrés. Total général 108 mètres quarrés, soit 115 mètres quarrés pour tenir compte des tuyaux de fumée.

Les résultats obtenus prouvent qu'avec ces sortes d'appareils il suffit de 1/2 mètre quarré de surface de chauffe pour 100 mètres cubes d'air à chauffer, car cela donne $115 \times 2 \times 100$ ou 23000 mètres cubes, c'est-à-dire un volume sensiblement égal au volume total du péristyle, de

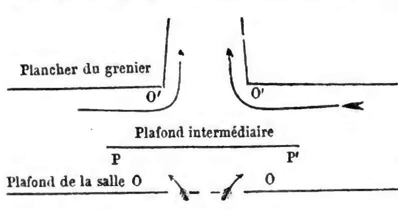
la salle, de la scène et des couloirs. La surface des grilles est de 50 décimètres quarrés pour chacun des grands calorifères et de 25 décimètres quarrés pour le petit. La surface totale est donc de 125 décimètres quarrés, et doit être largement suffisante, puisque d'ordinaire on compte 1 décimètre quarré de surface de grille par mètre quarré de surface de chauffe.

La moyenne des consommations, pour quatre heures de chauffage, a été de 190 kilog. au grand calorifère, côté Molière, de 180 kilog. au grand calorifère du côté Corneille, et de 60 kilog. au petit calorifère de la Conciergerie : total 430 kilog. C'est une consommation très-modérée. Au Théâtre-Lyrique, qui peut recevoir un nombre de spectateurs supérieur de 30 p. 100 seulement, la consommation moyenne par jour d'hiver est de 1 300 kilogrammes.

Les expériences ayant montré que la température se maintient à 20 degrés dans la salle pendant la représentation, lorsqu'elle est inférieure à 20 degrés au dehors, le but qu'on se proposait paraît atteint d'une manière satisfaisante.

Autrefois la chaleur était insupportable aux étages supérieurs.

Le système de ventilation est de la plus grande simplicité ; il consiste à faire évacuer les gaz et les vapeurs de la salle par une large cheminée d'appel, placée au-dessus du lustre, dont on utilise ainsi la chaleur pour le tirage. Mais, afin d'éviter que la colonne d'air ne s'élève directement suivant l'axe de la salle, pour évaser la colonne montante et lui faire lécher les parois, 81 ouvertures ont été pratiquées en



arrière et au-dessus des quatrièmes, au pourtour du plafond de la galerie. Un faux plafond PP' a été établi au-

dessus du lustre, à demi-intervalle entre le plancher du grenier et le plafond de la salle, de sorte que l'air appelé par la chaleur du lustre est forcé de passer par les 19 ouvertures O, d'une section totale de $4^{m}.80$, réparties sur tout le pourtour de la cheminée, et de rentrer par les 19 ouvertures O', d'une section totale de $10^{m.q}.26$, en se mélangeant avec les gaz évacués par les 81 ouvertures.

La section libre laissée au-dessus du lustre pour le passage de l'air, par la fermeture en bois doré évidée, n'est que d'un mètre quarré.

La section des orifices derrière les quatrièmes est de $17^{mq}.60$. C'est parce que cette surface est considérable que la vitesse n'est pas gênante pour les spectateurs.

La section de la grande cheminée, au niveau du plancher du grenier, est de $10^{mq}.55$. A ce niveau, la vitesse constatée avec l'anémomètre, dans une série d'expériences faites par MM. Labresson et Lorieux, a été en moyenne de $0^{m},70$ par seconde. La température correspondante était de 18 degrés, avec une salle à moitié pleine, les calorifères étant allumés.

Le dimanche 27 mai, les calorifères n'étant pas allumés, dans une salle remplie de spectateurs, avec une température de 12 degrés au dehors et de 19 à 21 degrés au dedans, la vitesse était de $1^{m}.50$.

La formule de l'anémomètre (qui avait été emprunté au Lycée impérial) est $V = 0.31685 + 0.118532 \times n$, n étant le nombre de tours relevé au moyen d'un compteur.

Le nombre de mètres cubes débité *par heure*, la vitesse étant de $0^{m}.70$, est, dans le premier cas, avec 650 spectateurs :

$$0^{m}.70 \times 3600 \times 10.55 = 26\,586 \text{ mètres cubes.}$$

Dans le second cas, le nombre de mètres cubes a été, avec 1300 spectateurs, de

$$1.50 \times 3\,600 \times 10.55 = 56\,970 \text{ mètres cubes,}$$

c'est-à-dire 41 mètres cubes par personne dans le premier cas et 44 mètres cubes dans le second.

D'après les observations de M. Thenard (4e volume, page 563), l'homme produit 119.13 calories par heure, et par le seul effet de sa respiration élève d'un degré par heure un volume d'air égal à 387 mètres cubes. Pour que la température reste stationnaire dans une enceinte remplie de spectateurs qui, comme une salle de théâtre, est enveloppée de corridors et sensiblement préservée du refroidissement par rayonnement des parois, il faut que l'on ait : $N \times 387$ mètres cubes $= x\,(T-t)$, N étant le nombre de spectateurs, T la température de la salle, t la température de l'air entrant, et x le nombre de mètres cubes introduits dans une heure. D'où

$$x = \frac{387 \times N}{T - t}.$$

La température dans la salle étant de 20 degrés et la température de l'air entrant de 12 degrés, le volume d'air à introduire pour que la température reste stationnaire est de $\frac{387}{8} = 48$ mètres cubes par spectateur.

Les volumes observés diffèrent peu de ce résultat. Les indications de Thénard se trouvent donc confirmées par ce qui se passe dans le théâtre de Nantes.

La ventilation de ce théâtre est obtenue par un procédé infiniment moins coûteux que le système employé dans les nouvelles salles de Paris, et le résultat paraît meilleur, le volume d'air évacué étant plus grand.

En résumé, la commission, à l'unanimité, est d'avis qu'il y a lieu de recevoir les calorifères et le système de ventilation. Elle estime que celui-ci réalise un progrès réel, au double point de vue de l'économie et de la salubrité.

Le rapporteur, LORIEUX.

Les membres de la commission :

BRISSONNEAU aîné, A. BOBIERRE, LABRESSON.

Ainsi que cela résulte de l'exposé de la commission, le problème n'a pas été complétement résolu, puisque l'air ne se renouvelle pas également bien dans toutes les parties de la salle, et que d'ailleurs le grand nombre des calorifères constitue une complication (*).

Il nous a paru, cependant, qu'il serait utile de porter notre tentative à la connaissance des constructeurs, parce qu'on manquait d'un procédé simple pour opérer, même imparfaitement, la ventilation des salles de théâtre. La cheminée centrale employée sans orifices au pourtour de la salle, comme on le faisait autrefois, ne produisait que des effets insignifiants.

Les grandes installations, dans le genre de celles du théâtre Lyrique et du Châtelet, ne sont pas à la portée de tout le monde; car l'une a coûté 216 000 fr. et l'autre 452 000 fr. Ces sommes comprennent 110 000 fr. pour appareils et le reste pour démolitions et reconstructions, le système suivi n'ayant été arrêté que peu de temps avant l'achèvement des édifices.

La dépense au théâtre de Nantes n'a été que de 24 000 fr. et cette somme doit être mise en regard des dépenses totales ci-dessus (et non du chiffre réduit de 110 000 francs), car nous opérions sur un bâtiment achevé, et une partie notable de la dépense correspond à des frangements et autres faux frais, qu'on éviterait en appliquant le système pendant la construction primitive.

Il est très-facile de chauffer de grands vaisseaux avec une dépense minime de combustible; il suffit de ne pas avoir d'orifices sérieux de sortie. Mais que devient la salubrité s'il s'agit d'une enceinte remplie de spectateurs? Il faut qu'une grande masse de gaz et de vapeurs s'écoule à l'extérieur, et pour cela disposer de moyens correspondants

(*) Nous avons réussi à chauffer le magasin au moyen d'un embranchement sur le calorifère R. L'inconvénient d'avoir un quatrième appareil sera donc évité. (*Note de novembre* 1866.)

d'entrée et de sortie, les uns ne pouvant produire d'effets convenables sans les autres. Nous recommandons de prendre les mesures nécessaires (cela est toujours facile) pour que l'air affluent soit saturé de vapeur d'eau au moment de son entrée dans les couloirs et sur la scène, afin que le mélange qui se fait dans ces espaces soit lui-même en partie saturé. L'air n'étant pas, à son entrée dans la salle, à une température aussi élevée qu'à la sortie, se chargera d'un supplément de vapeur emprunté aux spectateurs ; mais ce supplément ne correspondra, si la ventilation fonctionne bien, qu'à la différence des saturations pour deux températures assez voisines ; il ne sera guère que l'équivalent de la transpiration pulmonaire et de l'exhalation externe normales (*).

En résumé, l'exposé de nos travaux pourra faciliter l'assainissement économique des édifices déjà construits ; mais on fera bien de recourir aux publications relatives aux théâtres Lyrique et du Châtelet, lorsqu'on pourra distribuer à volonté les entrées et les sorties de l'air, comme cela a lieu dans les constructions neuves. Notre tentative pourra cependant être de quelque utilité, même pour les bâtiments à construire, parce qu'on est parfois très-limité, quant aux ressources applicables aux parties accessoires des édifices (**).

(*) L'imperfection du système de ventilation adopté réside surtout dans la manière dont l'air neuf pénètre dans la salle. Si cet air était sec, il produirait une impression de froid pénible, et la santé des spectateurs pourrait être compromise. Nous entretenons une couche d'eau sur le sol, dans l'espace limité par la tour en maçonnerie, sous l'un des grands calorifères. Dans l'autre, l'air chaud traverse une pluie fine au moment où, sortant de l'appareil, il entre dans les tuyaux de distribution. Avant de pénétrer dans la salle l'air saturé de vapeur d'eau se mélange avec l'air fourni par les joints des nombreuses baies du monument, et par les fréquentes ouvertures des portes extérieures résultant surtout des entrées et sorties du public.

(**) Une personne très-compétente a pensé, après une première

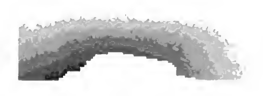
En réunissant les dépenses faites en régie au montant des travaux exécutés par M. Boyer, à qui l'on doit une grande partie des dispositions appliquées, on trouve :

	fr.
Appareils de chauffage.	7 000
Terrassements, frangements, déblais dans le rocher pour approfondissement des caves, boîtes, conduites, etc.	14 000
Dispositions spéciales pour la ventilation.	3 000
Total.	24 000

Nantes, 30 juillet 1866.

---

lecture, que notre système ne diffère pas beaucoup de ce qu'on faisait dans les anciennes salles, prétendant que l'air de la scène s'écoule par le trou du lustre. On a reconnu d'ailleurs que les calorifères sont bien établis, les conduites bien disposées et d'une section suffisante.— Notre bienveillant contradicteur a commis une erreur qu'il reconnaîtra certainement, s'il veut bien nous relire, en attribuant à la sortie d'air par le trou du lustre une importance qu'elle n'a pas, puisque la plus grande partie des orifices de sortie se trouve placée derrière les spectateurs des quatrièmes. — Nous ne faisons d'ailleurs que répéter ce que tout le monde sait en reconnaissant que M. le général Morin et M. l'architecte Davioud ont fait faire de grands progrès à l'art de ventiler les théâtres. Mais nous ne disposions pas de ressources suffisantes pour imiter les dispositions prises aux théâtres Lyrique et du Châtelet. Peut-être faut-il s'en féliciter, puisque nous avons prouvé qu'on peut rendre une salle de spectacle aussi salubre qu'autrefois elle l'était peu (aux étages supérieurs, du moins) avec une dépense relativement minime.



N° 144

NOTE

Sur les dépenses du trésor royal pour les ponts et chaussées, depuis l'institution de la charge de grand voyer de France en la personne de Sully jusqu'à l'avénement de Colbert au contrôle général des finances.

Par E. J. M. VIGNON, ingénieur en chef des ponts et chaussées.

La présente note a pour objet de combler sommairement une lacune que l'ignorance de certains documents m'avait obligé de laisser subsister dans le livre Ier des *Études historiques sur l'administration des voies publiques en France aux 17e et 18e siècles*, que j'ai publiées en 1862. Je me propose d'ajouter à cet ouvrage un 4e volume, qui sera consacré à l'histoire de l'administration des voies publiques des quatre grands pays d'états, la Bourgogne, la Bretagne, le Languedoc et la Provence, et d'introduire dans ce volume un appendice destiné à rectifier ou à compléter les notions que j'ai déjà données sur l'histoire des origines du service des ponts et chaussées. Mais je ne puis prévoir l'époque de cette nouvelle publication, dont je n'ai pas encore pu réunir tous les éléments. Dans la crainte d'un assez long retard, j'ai voulu du moins porter dès à présent, d'une manière succincte, la rectification importante dont il s'agit ici à la connaissance de ceux de MM. les ingénieurs qui ont lu mon ouvrage. J'ai pensé que la voie des *Annales* était la plus naturelle pour la leur faire parvenir. Tel est le motif qui m'a fait solliciter l'insertion de cette note.

Au § 20 du livre Ier des *Études historiques* ci-dessus rappelées, tome Ier, page 131, je n'avais donné que des notions très-incomplètes, d'après Forbonnais, sur les dépenses re-

latives aux ponts et chaussées dans la première moitié du XVIIe siècle, c'est-à-dire depuis Sully jusqu'à Colbert. Peu de temps après la publication de ces études, M. l'ingénieur en chef Nicolas voulut bien me communiquer un ouvrage rare, dont il avait eu la bonne fortune de découvrir et de se procurer un exemplaire. Cet ouvrage, connu des érudits sous le nom de *Comptes de Mallet*, est intitulé : « Comptes « rendus de l'administration des finances du royaume de « France sous Henri IV, Louis XIII et Louis XIV. » L'auteur, premier commis des finances sous le contrôleur général Desmarets, de 1708 à 1715, l'a composé sur les documents officiels que sa position administrative lui a permis de compulser et de réunir.

Si, comme on n'en peut douter, l'intention d'Henri IV et de Sully, en créant la charge de grand voyer de France, était de faire intervenir efficacement le pouvoir central dans les travaux publics concernant les voies de communication des diverses provinces du royaume, les dépenses y relatives devaient figurer pour un chiffre quelconque dans les états des finances royales à partir de cette institution, et, par conséquent, dans les comptes recueillis et publiés par Mallet. Cette prévision naturelle s'est trouvée complétement réalisée. Mallet donne, en trois périodes, les états des dépenses annuelles ordinaires de la couronne ou de l'État, de 1600 à 1661; et tous comprennent un article sous le titre de *Ponts et chaussées*. J'ai donc pu établir sur ces documents le tableau ci-après, qui, dans mes *Études historiques*, aurait dû précéder le tableau A du § 20 du livre Ier.

ANNÉES.	DÉPENSES des ponts et chaussées.		ANNÉES.	DÉPENSES des ponts et chaussées.	
	Livres tournois.	Monnaie actuelle		Livres tournois.	Monnaie actuelle.
De 1600 à 1610. — Henri IV.					
		francs.			francs.
1600	6 000	17 520	1606	740 800	2 163 136
1601	5 765	16 834	1607	842 227	2 459 303
1602	15 570	45 464	1608	1 224 153	3 574 527
1603	4 000	11 680	1609	1 149 150	3 355 518
1604	46 600	136 072	1610	991 563	2 895 364
1605	595 469	1 738 769			
De 1611 à 1642. — Louis XIII.					
1611	743 045	2 169 691	1627	83 494	225 434
1612	750 545	2 191 591	1628	58 992	159 278
1613	813 145	2 374 383	1629	44 500	120 150
1614	796 746	2 326 498	1630	381 043	983 091
1615	841 099	2 270 967	1631	23 000	59 340
1616	13 886	37 492	1632	51 592	133 107
1617	29 700	80 190	1633	38 544	99 444
1618	222 085	599 629	1634	154 703	386 758
1619	193 377	522 118	1635	83 737	209 342
1620	153 951	415 668	1636	43 145	107 862
1621	86 248	232 870	1637	72 689	145 378
1622	120 300	324 810	1638	76 942	153 884
1623	29 087	78 535	1639	38 634	77 268
1624	39 900	107 730	1640	79 600	159 200
1625	9 100	24 570	1641	141 683	283 366
1626	13 000	35 100	1642	163 934	327 868
De 1643 à 1661. — Louis XIV, jusqu'à Colbert.					
1643	45 600	91 200	1653	24 075	48 150
1644	90 602	181 204	1654	Les états des années 1652, 1654, 1655 et 1656 ne comprennent point de dépenses pour les ponts et chaussées. Pour les cinq dernières années, il n'existe point d'états, « les comptes de ces années, dit Mallet, n'ayant point été rendus. »	
1645	37 643	75 286	1655		
1646	(*a*) 1 023 600	2 047 200	1656		
1647	34 506	69 012	1657		
1648	34 850	69 700	1658		
1649	6 400	12 800	1659		
1650	1 300	2 600	1660		
1651	11 400	22 800	1661		
1652	»	»			

(*a*) Chiffre dont la disproportion avec ceux des années voisines parait inexplicable, au point que je crois devoir le regarder comme le résultat d'une erreur matérielle.

Mais, dira-t-on, ce tableau est-il comparable au tableau A des *Études historiques?* Donne-t-il des chiffres ayant la même origine et le même objet? Oui, et en voici la preuve.

D'abord les états dont il est déduit représentent, suivant Mallet, les dépenses exclusivement faites sur les fonds

entrés au trésor royal. Or c'est du même trésor, comme je l'ai dit en son lieu, qu'étaient tirés les fonds dont le tableau A donnait les chiffres.

En second lieu, Forbonnais a donné, ainsi que Mallet, les états des dépenses du trésor royal pour les années qui suivent 1661. Or, pour ces années, la concordance est absolue (à deux exceptions près, en 1670 et en 1682) entre les chiffres donnés par Mallet, les chiffres donnés par Forbonnais, et ceux que présente le tableau A d'après l'état par abrégé du contrôleur général Pontchartrain.

Il n'y a donc absolument aucun doute : les chiffres du tableau ci-dessus sont bien ceux des fonds tirés du trésor royal pour les ponts et chaussées de 1600 à 1661, comme ceux du tableau A pour les années postérieures. Nous avons ainsi la série complète des dépenses annuelles faites par le trésor royal pour les ponts et chaussées pendant tout le XVIIe siècle, et nous devons reconnaître à Henri IV et à Sully le mérite d'avoir institué ce nouvel emploi d'une partie, si faible fût-elle en certaines années, des fonds centralisés au siége du gouvernement.

Mais il ne faut pas oublier que les sommes ainsi tirées du trésor royal n'étaient pas les seules qui fussent employées aux travaux des ponts et chaussées. On a pu voir, tableau B des *Études historiques*, que de 1683 à 1700 elles n'ont pas atteint en moyenne la moitié du chiffre total des dépenses de ce genre. Quelques arrêts du conseil retrouvés, qui créaient des impositions spéciales et locales pour des ouvrages déterminés, prouvent qu'il en était de même antérieurement, du moins quand les produits de ces impositions spéciales n'étaient pas détournés. D'ailleurs les crédits qui furent affectés aux ponts et chaussées sur le trésor royal depuis 1600 n'étaient qu'un supplément destiné à venir en aide aux provinces pour les réparations qui les intéressaient directement, et pour lesquelles des taxes locales de diverses natures leur étaient imposées suivant les be-

soins. Plus on remonte à l'origine des allocations du trésor royal pour cet objet, plus on reconnaît que les taxes locales durent former la principale ressource. Et il en fut ainsi *à fortiori* toutes les fois que les fonds du Trésor étaient absorbés par les troubles intérieurs, les guerres étrangères et autres exigences politiques. Malheureusement les documents manquent pour établir entre ces deux éléments distincts un terme de comparaison approximative quelconque.

Il est impossible de n'être pas frappé, à l'inspection du tableau, des variations notables que présentent les chiffres de dépenses des diverses années. Sans doute, les principales de ces variations ont de certains rapports avec les faits les plus saillants de l'ordre politique. Mais le mécanisme financier et le système de comptabilité d'alors sont si peu connus dans leurs détails, qu'on risquerait souvent de se tromper si l'on poussait trop loin la recherche de ces rapports. On sait d'ailleurs que la séparation rigoureuse des exercices annuels n'existait guère alors, ni dans le recouvrement des impôts, ni dans l'exécution et le payement des travaux, ni dans la reddition des comptes, qui était souvent en arrière de plusieurs années. Le trouble et la confusion en cette matière ne purent qu'être encore augmentés par les dilapidations nombreuses justement reprochées aux favoris, aux princes, aux factions, aux ministres même, pendant cette période calamiteuse et agitée qui sépara la mort de Henri IV de la majorité de Louis XIV.

Je me permettrai donc seulement quelques aperçus généraux.

De 1600 à 1605, l'institution de la charge de grand voyer est toute nouvelle; ses lieutenants dans les provinces ne sont pas établis; la hiérarchie et les attributions ne sont pas fixées; rien ne fonctionne encore : il n'est donc pas étonnant que les allocations sur le Trésor royal pour travaux publics restent à peu près nulles. Mais, à partir du règlement du 13 janvier 1605, le nouveau service est or-

ganisé, et les crédits augmentent rapidement. Ils se soutiennent assez après l'assassinat d'Henri IV et la retraite de Sully, même jusqu'en 1615, par suite, sans doute, de la première impulsion donnée et grâces aux réserves amassées dans l'épargne royale. Mais les désordres de l'administration du maréchal d'Ancre et les séditions qui aboutirent à sa mort réduisent presque à rien, en 1616 et 1617, le fonds des travaux publics. Il se relève un peu à l'avénement du duc de Luynes, pour décroître de nouveau par la recrudescence des troubles civils et religieux jusqu'au moment où le pouvoir passe aux mains de Richelieu. Il reste stationnaire à un chiffre peu élevé pendant tout ce ministère, où presque toutes les ressources de l'État sont consacrées à des guerres étrangères et à la compression des révoltes intérieures. Après la mort de Richelieu, ce fonds fléchit de nouveau jusqu'à se réduire entièrement à zéro, au milieu des intrigues de la Fronde et dans la misère générale qui affligea alors le royaume. Quant aux cinq dernières années avant Colbert, le désordre était devenu tel, que Mallet affirme qu'il n'y fut jamais rendu aucun compte.

Une fois en possession de cette série d'allocations affectées annuellement sur le Trésor royal aux ouvrages des ponts et chaussées pendant la première moitié du XVIIe siècle, je devais y voir le résumé et l'indice des actes administratifs et financiers qui durent, dans cette période, pourvoir au règlement des détails de préparation, d'exécution et de conservation de ces ouvrages. Il était intéressant de retrouver ces actes. Les recherches que j'entrepris dans ce but aux Archives impériales n'ont pas été entièrement infructueuses, bien qu'il ne s'y trouve plus que de rares débris d'un nombre considérable de documents disparus sur cette matière. Je me bornerai à citer ici le plus important, unique en son genre, qui concorde avec le caractère purement financier de cette note.

C'est « l'État général des deniers destinés pour les répa-« rations des ouvrages publics, ponts, pavés, chemins, « chaussées et canaux des rivières de France, pour l'an-« née 1614, dont le maniement se fera par Me Louis Ar-« nauld (*), conseiller secrétaire du roi, commis par Sa « Majesté à la recette et dépense générale des dits de-« niers... » ; en d'autres termes, *le budget des ponts et chaussées pour l'année* 1614.

Cet état donne, en recette, le détail, par généralités, des impositions spéciales levées pour les ponts et chaussées en général et pour tel ou tel ouvrage particulier ; et, en dépense, celui des crédits affectés auxdites généralités et auxdits ouvrages. Malgré l'intérêt que ce détail présente, je dois me borner à donner ci-après, dans un tableau unique, les totaux des divers articles. Je renvoie, pour le texte complet, à la publication ultérieure dont j'ai parlé.

(*) Trésorier général des ponts et chaussées.

ARTICLES.	RECETTES.		DÉPENSES.	
	livres	sous.	livres.	sous.
Généralité de Paris	325 470	»	286 470	»
Généralité de Soissons	26 000	»	6 000	»
Généralité d'Amiens	15 000	»	7 500	»
Généralité de Châlons	61 569	12	43 659	12
Généralité de Rouen	94 000	»	59 500	»
Généralité de Caen	34 500	»	15 000	»
Généralité d'Orléans	45 000	»	7 500	»
Généralité de Tours	37 000	»	17 500	»
Généralité de Poitiers	72 500	»	30 000	»
Généralité de Bourges	17 385	15	23 885	15
Généralité de Moulins	17 500	»	3 500	»
Généralité de Riom	33 000	»	7 500	»
Généralité de Lyon	34 000	»	11 500	»
Généralité de Limoges	34 590	»	7 500	»
Généralité de Bordeaux	33 000	»	7 500	»
Généralité de Dijon	12 000	»	12 000	»
Généralité de Grenoble	12 000	»	12 000	»
Tour de Cordouan	»	»	6 000	»
Pont d'Avignon	»	»	20 000	»
Sommes totales	904 515	7	584 515	7

Suivent deux autres articles de dépenses ainsi conçus :

« Autre dépense des deniers des levées libellées pour les ponts « et chaussées, qu'il est ordonné audit Me Louis Arnauld de mettre « entre les mains des trésoriers de l'épargne, *nonobstant qu'il soit « ordonné par les états des finances de S. M. que lesdits deniers ne « pourront être divertis, ni employés ailleurs pour quelque cause « et occasion que ce soit* : »

	livr.	s.
	584 515	7
A Me Étienne Puget, trésorier de l'épargne	60 000	»
A Me Boucher de Beaumarchais, trésorier de l'épargne.	100 000	»

« Autre dépense des deniers levés pour le canal de « Loire qu'il est aussi ordonné audit Me Louis Arnauld, « etc.

A Me Boucher de Beaumarchais, trésorier de l'épargne.	160 000	»
Somme totale de la dépense, pareille à la recette	904 515	7

« Fait et arrêté au conseil d'état du Roi tenu pour les finances, « à Paris le 5ᵉ juillet 1614.

« Signé MAUPEOU. »

Terminons par de courtes remarques sur ce document :

Suivant l'état détaillé des recettes, chaque généralité supportait une levée nominalement affectée aux ponts et chaussées de la généralité, puis diverses levées spéciales pour des ouvrages déterminés, qui n'étaient pas toujours dans la généralité même, mais qui l'intéressaient plus ou moins directement. On y voit figurer aussi quelques droits d'entrée ou de passage imposés à certaines villes.

Dans le détail de l'état de dépense comparé à celui de l'état de recette, on voit que la prétendue spécialité des levées n'a rien de réel dans l'application; que le crédit de dépense affecté à chaque généralité se compose de portions détachées des recettes des diverses levées, et qu'il est très-différent de l'une à l'autre et sans rapport avec les levées que chacune supporte, mais toujours inférieur au montant de ces levées, si ce n'est pour la généralité de Bourges, où il est supérieur, et pour les généralités de Dijon et de Grenoble, qui paraissent traitées d'une façon distincte. Après les articles relatifs aux généralités, est un article de dépense pour la tour de Cordouan très-inférieur au montant des levées libellées pour cette tour dans plusieurs généralités, et un autre pour le pont d'Avignon entièrement imputé sur les levées destinées à la tour de Cordouan.

Mais, ce qui est plus grave, le total de ces dépenses est inférieur au total de la recette d'une somme de 320 000 livres, que deux articles additionnels font verser au Trésor royal, « nonobstant qu'il soit ordonné par les états des « finances de Sa Majesté que lesdits deniers ne pourront « être divertis ni employés ailleurs, pour quelque cause et « occasion que ce soit. » Cette clause, violatrice de l'engagement ostensible pris vis-à-vis du public, montre bien

qu'on avait l'intention d'employer ces fonds divertis à des dépenses de toute autre nature.

Ces détournements officiels de deniers avaient de singulières et fâcheuses conséquences. Non-seulement ils provoquaient de justes plaintes de la part des provinces intéressées, qui voyaient leurs chemins et leurs ponts laissés dans l'abandon tandis que les populations payaient des impositions nominalement destinées à leurs réparations, mais encore des actes d'opposition de la part des trésoriers de France et du grand voyer lui-même, qui, se fondant sur le libellé ci-dessus rappelé des états du roi et des arrêts d'imposition, défendent au trésorier des ponts et chaussées de se dessaisir des fonds pour autre objet que le payement des ponts, pavés et autres ouvrages publics. Alors des arrêts du conseil sont rendus pour, en violation des contrats formulés par le conseil lui-même, casser les ordonnances des trésoriers de France et du grand voyer, qui en revendiquent l'exécution. J'ai relevé plusieurs de ces arrêts, et je donnerai le texte de l'un d'eux.

Mais, ce qui est plus curieux encore, c'est que des agents comptables eux-mêmes, ailleurs d'audacieux chevaliers d'industrie, comme on le vit même encore sous Colbert, profitent de ce désordre pour pratiquer des divertissements de fonds à leur profit. Et alors le conseil, sur les remontrances qui lui sont adressées des provinces, jaloux de paraître maintenir aux impositions ordonnées leur légitime destination, enjoint au trésorier des ponts et chaussées de produire ses comptes, et ne manque pas de « faire très-« expresses defenses aux trésoriers de France et lieute-« nants de la voirie des généralités de ce royaume de di-« vertir, pour quelque occasion que ce soit, les deniers qui « sont ou seront ci-après employés dans les états de Sa « Majesté pour les réparations des ponts et chaussées et « ouvrages publics, sur peine de répétition sur eux, et du « double. » Il faut convenir qu'entre cette menace et la

cassation de leurs ordonnances d'opposition, les trésoriers de France devaient se trouver dans un singulier embarras.

Les besoins du Trésor royal, dilapidé ou épuisé par les frais des guerres civiles et étrangères, poussèrent même le gouvernement, sous Richelieu, à retirer aux pays d'états l'administration de leurs propres deniers pour les travaux publics, sous prétexte de mauvaise gestion, et à y substituer une imposition royale, dont le produit tout entier était enlevé à ces provinces et versé au Trésor royal. Cet abus de pouvoir ne cessa que sur les réclamations persévérantes des états, et après une restitution partielle progressive des fonds arbitrairement détournés; mais ces faits seront rapportés plus au long dans l'histoire des ponts et chaussées des pays d'états.

Ainsi le gouvernement, dans sa détresse financière, en était venu alors à transformer les encouragements d'abord fournis aux provinces par le Trésor royal pour leurs ouvrages publics, en une sorte de confiscation des produits des taxes spéciales qui leur étaient imposées pour ces mêmes ouvrages.

Paris, le 29 janvier 1866.

N° 145

NOTICE

Sur les frais de construction et d'entretien des chemins vicinaux de grande communication.

Par M. MARCHAL, ingénieur en chef des ponts et chaussées.

Lors de la discussion, au Corps législatif, de la loi sur les attributions des conseils généraux, les qualités et les défauts du corps des ponts et chaussées ont été l'objet d'une vive controverse. Quelques orateurs ont demandé que les départements pussent enlever aux ingénieurs le service des routes départementales, en s'appuyant sur ce que ces ingénieurs ne se prêtaient pas à faire économiquement les travaux d'ordre secondaire. Cette assertion a été vivement combattue, au nom de la logique, par d'autres orateurs, dont un d'autant plus compétent en la matière qu'il a appartenu lui-même au corps des ponts et chaussées; mais la question est restée entre une affirmation et une dénégation, à l'appui desquelles il n'a pas été produit de preuves.

Malgré tout ce qui a pu être dit de flatteur pour le corps des ponts et chaussées, même par ses adversaires les plus prononcés, il n'est douteux pour personne que ces attaques, et d'autres qui se sont produites depuis, ne tendent à rien moins qu'à la destruction complète de ce corps; si bien que, sur l'observation des conséquences que pourrait avoir le retrait du service des routes départementales, un orateur, reproduisant la phrase célèbre d'un des grands

sermonnaires, s'est écrié : *Les ingénieurs sont faits pour les routes, et non les routes pour les ingénieurs.*

Nous acceptons l'aphorisme, mais à une condition, c'est que l'assertion sur laquelle on l'appuie sera prouvée ; or nous sommes en mesure de démontrer que cette assertion est complétement inexacte. Les ingénieurs des ponts et chaussées sont restés au niveau de leur tâche, aussi bien dans les travaux modestes des chemins vicinaux, quand on a bien voulu les leur confier, que dans ces gigantesques monuments qui traversent les siècles, en immortalisant l'époque qui les a vu édifier.

Il est temps de rechercher la vérité et de la mettre au jour, car la critique partie du haut de la tribune a germé ; elle est devenue presque un axiome pour le public, toujours si prompt à attaquer ce qui existe, et même pour d'éminents administrateurs, qui n'ont pas toujours le temps ou le moyen de faire des vérifications. Lorsque nous aurons rétabli la vérité en nous basant sur des preuves certaines, nous dirons comment a pu s'introduire cette erreur dans l'esprit d'honorables députés et, par eux, se répandre dans le public.

Nous avons été mis sur la voie de cette réfutation par ce qui se passe dans le département de la Mayenne, où le service des chemins vicinaux de grande communication a toujours été confié aux soins des ingénieurs. Ces travaux sont presque entièrement terminés, on peut donc en comparer le coût moyen, qui est de 6f.79 par mètre courant, avec le prix moyen des chemins vicinaux de l'empire entier, qui, d'après le *Moniteur* (24 janvier 1866), est de 9f.86. Ainsi voilà déjà un département pour lequel l'assertion n'est pas fondée.

Cette première constatation nous a amené à rechercher si l'assertion était mieux fondée pour d'autres départements, si la Mayenne fait une rare et inexplicable exception. Or cette vérification, dont nous allons rendre compte,

nous a fait reconnaître que le fait relatif à la Mayenne est général.

Nous avons pris le groupe des quinze départements de l'Ouest compris entre la Seine et la Loire, embrassant une étendue de 9 millions d'hectares, soit un sixième de la superficie totale de l'empire. Dans ce groupe, il y a trois départements, savoir : Eure-et-Loir, Mayenne et Côtes-du-Nord, où les ingénieurs des ponts et chaussées sont restés à la tête du service vicinal de grande communication, et douze départements dans lesquels, après plus ou moins de vicissitudes, le service vicinal a été définitivement et depuis longtemps constitué entre les mains d'agents voyers étrangers au corps des ponts et chaussées. Les trois départements du premier groupe sont, par un heureux hasard, très-favorablement placés pour qu'on puisse, des faits qu'y s'y rapportent, déduire une moyenne exacte ; car l'un de ces départements est très-voisin de Paris, un autre très-éloigné et le troisième intermédiaire. De plus, ces trois départements sont à cheval sur le faîte séparatif des deux grands bassins ; le sol y est accidenté et fortement ondulé, les difficultés à résoudre y sont notablement plus grandes qu'elles ne le sont dans quelques-uns des départements situés en pleine vallée, qui font partie du second groupe. Ce sont peut-être ces difficultés qui ont fait conserver aux ingénieurs l'attribution de ce service, tandis qu'il leur était enlevé dans la plupart des autres. Voyons donc les résultats comparatifs obtenus par les deux organisations parallèles.

Les chiffres que nous allons citer sont exclusivement extraits des documents officiels ; nous en indiquons les sources afin qu'aucun doute n'existe sur leur exactitude, et que chacun puisse d'ailleurs les vérifier. Ces documents sont : 1° le rapport officiel, émané du ministère de l'intérieur, sur le service des chemins vicinaux de 1857 à 1861 ; 2° les procès-verbaux des délibérations des conseils généraux de

1861 à 1865. Nous examinerons successivement ce qui concerne les frais de construction, l'entretien et les dépenses de personnel (*).

Dépenses de construction des chemins vicinaux de grande communication.

(1er TABLEAU.)

Groupe des départements confiés aux ingénieurs des ponts et chaussées.

DÉSIGNATION des départements.	LONGUEUR à l'état d'entretien en 1865.	DÉPENSES totales pour construction et grosses réparations.	PRIX MOYEN du mètre courant.	Observations.
	mètres.	francs.	francs.	
Eure-et-Loir.	1 287 280	7 388 284	5.74	
Mayenne.	822 899	5 589 839	6.79	
Côtes-du-Nord.	1 291 624	5 542 995	4.28	
Totaux et moyennes. . .	3 401 803	18 521 118	5.44	

(*) Nous n'avons évidemment pas dû comprendre dans ce travail comparatif le département de la Seine parce que les splendeurs de la capitale exigent que les avenues qui y conduisent soient construites avec un luxe tout exceptionnel, aussi fait-on dans ce département, sous le nom de chemins vicinaux, de larges et splendides boulevards.

(2e TABLEAU.)

Groupe des départements placés sous la direction d'un service spécial d'agents voyers.

DÉSIGNATION des départements.	LONGUEUR à l'état d'entretien en 1865.	DÉPENSES totales de construction et grosses réparations.	PRIX moyen du mètre courant.	OBSERVATIONS.
	mètres.	francs.	francs.	
Calvados.	889 223	6 213 549	6.99	
Eure.	1 434 137	8 110 389	5.65	Dans ce département, le prix moyen des matériaux n'est que de $4^{f}.42$ et celui de la main-d'œuvre $1^{f}.98$.
Finistère.	682 920	5 144 461	7.53	
Ille-et-Vilaine. . . .	975 448	7 833 512	8.03	
Loir-et-Cher.	427 753	2 112 642	4.93	Ce département, situé dans la vallée de la Loire, n'a presque pas de relief.
Loire-Inférieure. . .	1 760 479	10 836 190	6.15	Même observation.
Manche.	1 109 964	8 748 200	7.88	
Maine-et-Loire. . . .	992 753	8 704 637	8.76	
Morbihan.	995 995	7 429 550	7.46	Dans ce département, on réduit les chaussées à 3 mètres de largeur et l'épaisseur à moins de $0^{m}.12$. (P. V, année 1865, page 159.)
Orne.	1 200 000	8 280 759	6.90	
Sarthe.	852 052	6 765 761	7.94	
Seine-et-Oise.	657 919	6 121 088	9.30	
Totaux et moyennes.	11 978 643	86 300 738	7.20	

Le prix moyen de la construction des chemins vicinaux de grande communication est donc de $5^{f}.44$ pour les chemins construits par les ingénieurs; il est de $7^{f}.20$ pour ceux construits par les agents voyers, soit une différence de $1^{f}.76$ par mètre courant; or cette différence appliquée à une longueur de 11 978 643 mètres donne le chiffre fort respectable de 21 082 411 francs, soit plus de 21 millions.

Il est donc déjà établi que pour les travaux de même nature, ceux exécutés par les ingénieurs, loin de coûter plus cher, coûtent notablement moins que ceux exécutés par les agents voyers. On n'a jamais prétendu d'ailleurs que

les ingénieurs fissent moins bien, au contraire, on leur a reproché d'apporter trop de luxe dans leurs travaux, et l'on voit que ces travaux coûtent cependant encore moins cher que les autres.

D'où vient donc l'erreur dans laquelle sont tombés, avec la plus entière bonne foi, les adversaires des ingénieurs, et, après eux, le public? Il est facile d'en trouver les motifs.

On a comparé entre eux des travaux qui ne sont pas comparables.

Comme dans tous les départements les routes départementales sont dans les attributions des ingénieurs, et dans la plupart des départements les chemins vicinaux de grande communication sont dirigés par des agents voyers, on a cru pouvoir comparer le prix moyen des travaux des routes départementales au prix moyen des chemins vicinaux, et comme les premiers coûtent plus cher que les seconds, on s'est cru en droit d'en conclure que les ingénieurs construisent toujours plus chèrement que les agents voyers.

Il y a cinq classes de voies de communication de terre, savoir : les routes impériales, les routes départementales, les chemins vicinaux de grande communication, les chemins vicinaux d'intérêt commun, enfin les chemins vicinaux ordinaires.

	fr.
Le prix moyen du mètre courant des routes impériales est de.	20.00
Le prix moyen du mètre courant des routes départementales.	15.00
Le prix moyen du mètre courant des chemins vicinaux de grandes communication.	9.86 (*)
Le prix moyen du mètre courant des chemins d'intérêt commun. . . . . , ...	5.48 (*)
Le prix moyen du mètre courant des chemins vicinaux ordinaires. . . . . , . . .	3.94 (*)

(*) D'après le *Moniteur* du 24 janvier 1866. Exposé de la situation de l'Empire.

Les routes impériales et les routes départementales sont sous la direction exclusive des ingénieurs. Les chemins vicinaux des trois catégories sont, pour les 9 dixièmes du territoire, sous la direction exclusive d'un personnel spécial d'agents voyers n'ayant aucun lien entre eux, et ne formant aucune hiérarchie.

La différence de largeur des routes impériales et des routes départementales, pas plus que la différence de largeur des chemins vicinaux des différentes catégories, ne suffiraient à expliquer les différences de prix de construction des uns et des autres. Ce n'est pas non plus dans les qualités différentes du personnel qu'il faut chercher la raison de ces différences, puisque le rapport du coût des chemins de différentes catégories est plus élevé que le rapport du coût des routes départementales et des chemins de grande communication; il faut donc chercher la raison de ces différences dans la nature de ces différents genres de travaux et dans les conditions auxquelles ils doivent satisfaire.

Toutes les parties d'une même route ou d'un même chemin sont loin de coûter le même prix. En plaine, quand il n'y a aucun obstacle à franchir, aucune ville, aucun bourg à traverser, le prix est faible, quel que soit le genre de voie; mais quand il faut gravir les pentes escarpées, faire sauter des rochers, franchir des rivières, traverser des villes, bourgs ou villages, le coût augmente de suite considérablement. Or que fait-on dans tous les cas? On laisse à la charge de la voie principale les frais des principaux obstacles, et les voies d'ordre inférieur viennent se souder à celle-là après ou avant les obstacles franchis, de manière à profiter des dépenses faites pour les franchir. C'est ainsi que les routes départementales se soudent aux routes impériales, les chemins de grandes communication aux routes départementales, les chemins d'intérêt commun aux chemins de grande communication, etc.; rien de plus

logique, et c'est là, indépendamment des différences de largeur et d'épaisseur des chaussées, l'explication des différences de prix de ces différentes natures de voies de communication.

Ainsi, il ne faut jamais comparer les frais de construction des voies d'ordre différent si l'on veut arriver à des conclusions justes, mais bien comparer entre eux les frais relatifs aux voies de même nature. C'est ce que nous avons fait, et c'est pourquoi nous arrivons à des conclusions diamétralement opposées à celles des honorables députés qui ont reproché aux ingénieurs de construire plus chèrement que ne le font les agents voyers.

TRAVAUX D'ENTRETIEN.

Le problème de l'entretien des chaussées d'empierrement est un des plus difficiles à résoudre, malgré sa simplicité apparente. Il suffira pour faire comprendre sa difficulté d'énoncer les différents éléments qui entrent en proportions variables dans sa solution ; ce sont : la fréquentation, la saison où s'opère la plus grande circulation, le poids des chargements, la nature du sous-sol, la qualité des matériaux, l'exposition, l'inclinaison, le prix des matériaux, les prix de main-d'œuvre et les qualités physiques des cantonniers et ouvriers auxiliaires. Les nombreux mémoires publiés sur cette matière par les ingénieurs, l'amélioration obtenue depuis trente ans sur les chaussées des routes impériales et départementales, prouvent que les ingénieurs savent très-bien sortir des abstractions des mathématiques transcendantes pour étudier les effets du rabot et du balai.

Les frais d'entretien des chemins sont, sinon proportionnels, du moins fonction du chiffre de la circulation. Malheureusement nous n'avons aucun document qui établisse les chiffres de circulation sur les chemins vicinaux ; mais, à défaut de chiffres précis, nous pensons qu'il

est assez logique d'admettre que les fréquentations respectives entre départements sont proportionnelles à celles constatées sur les routes impériales.

Nous avons, en conséquence, dans le tableau ci-après, classé les départements suivant les fréquentations constatées sur les routes impériales et consignées au tableau dressé par le ministre des travaux publics. Nous donnons les dépenses moyennes d'entretien pour une période de dix ans. Nous avons eu soin de souligner les départements qui font partie du premier groupe, c'est-à-dire ceux dont les chemins vicinaux de grande communication sont placés sous la direction des ingénieurs.

DÉPARTEMENTS classés par ordre d'importance de la fréquentation sur les routes impériales.	DÉPENSES MOYENNES d'entretien des chemins vicinaux de grande communication pour une période de dix ans.	OBSERVATIONS.
	fr.	
Seine-et-Oise	0.54	
Calvados	0.37	
Manche	0.37	
Finistère	0.17	
Mayenne	0.37	
Maine-et-Loire	0.33	Y compris les dépenses de rechargement opérées en 1861 et 1862.
Loire-Inférieure	0.33	
Orne	0.37	
Eure-et-Loir	0.27	
Sarthe	0.299	
Ille-et-Vilaine	0.25	
Côtes-du-Nord	0.195	
Eure	0.27	
Loir-et-Cher	0.22	
Morbihan	0.26	
Moyenne totale	0.308	

Si l'on fait les moyennes respectives des départements des deux groupes que nous avons considérés, on trouve pour la moyenne de ceux placés sous la direction des in-

génieurs, $0^f.278$, et pour la moyenne de ceux placés sous la direction des agents voyers, $0^f.315$.

Donc pour les départements confiés aux ingénieurs, la dépense d'entretien est, comme pour les travaux neufs, inférieure aux dépenses de même nature par les agents voyers.

Cependant il serait téméraire de tirer une conclusion trop absolue de ce fait, attendu que d'un département à l'autre les différences sont si prononcées, qu'il est évident que ni les ingénieurs ni les agents voyers ne sont libres de pratiquer l'entretien suivant les véritables besoins, liés qu'ils sont les uns et les autres par les exigences budgétaires.

Ainsi, tandis que dans le premier groupe nous voyons une dépense de $0^f.57$ par mètre courant dans la Mayenne, nous trouvons une dépense de $0^f.195$ seulement dans les Côtes-du-Nord;

Dans le second groupe, nous trouvons des dépenses de $0^f.54$ dans Seine-et-Oise, $0^f.37$ dans la Manche, $0^f.37$ dans l'Orne, tandis que nous ne trouvons que $0^f.17$ dans le Finistère, $0^f.26$ dans le Morbihan, $0^f.27$ dans l'Eure.

Les différences dans chaque groupe sont trop considérables pour pouvoir être expliquées par des différences dans les chiffres de circulation et dans le prix des matériaux; le département du Finistère présente surtout une anomalie, car ce département, qui serait le quatrième pour sa fréquentation, est le dernier pour les dépenses d'entretien; il est bien évident que les chaussées de ce département ne sont réellement pas entretenues dans le sens que l'on doit attribuer à ce mot.

Il y a deux systèmes d'entretien des chaussées, l'un qui consiste à faire en sorte que pendant une période plus ou moins longue, dix, quinze ou vingt ans, par exemple, les routes ou chemins présentent à la circulation des surfaces suffisamment résistantes et roulantes, sans se préoccuper

absolument de l'usure de la chaussée, que l'on recharge plus tard moyennant des crédits extraordinaires, laissant ainsi peser sur l'avenir une partie des dépenses que l'on épargne dans le présent. Cela s'appelle vulgairement manger son blé en herbe; ce mode a malheureusement été trop pratiqué, même pour les routes impériales et départementales, malgré la résistance et les vives sollicitations des ingénieurs; aussi la situation de l'empire constate-t-elle l'amincissement progressif des chaussées, et le budget de l'État comprend-il chaque année un fonds très-insuffisant de 4 à 5 millions destiné aux chargements des chaussées des routes impériales, et les départements, de leur côté, sont-ils contraints de contracter de forts emprunts pour faire la même opération pour la restauration des routes départementales.

En ce qui concerne les chemins vicinaux, si le même besoin ne s'est pas encore fait universellement sentir, c'est que ces chemins sont encore neufs, et que les chaussées, bien qu'ayant perdu une partie de leur épaisseur primitive, en ont encore assez pour supporter le roulage; mais on voit déjà poindre la nécessité de rechargements qui iront progressivement en augmentant, et grèveront, dans un avenir prochain, les budgets des départements et des communes dans une mesure effrayante. Nous en trouvons la preuve dans ce fait que le département de Maine-et-Loire a consacré 80 000 fr. en 1861 et 210 000 fr. en 1863 aux rechargements des chaussées trop amincies par un entretien insuffisant. Dans le département de l'Orne, qui n'est pourtant que le huitième pour la fréquentation, bien que les dépenses d'entretien atteignent 0f.37, comme dans la Manche et la Mayenne, les procès-verbaux des délibérations du conseil général (1861, p. 132; 1862, p. 51; 1863, p. 118) constatent l'amincissement des chemins et la nécessité de rechargements évalués déjà à plus de 100 000 fr.

Dans le département de la Manche, les procès-verbaux

des délibérations du conseil général (année 1865, p. 84) constatent que le chiffre de 0f.40 par mètre courant est considéré comme strictement nécessaire à l'entretien.

L'autre système, qui est celui adopté par les ingénieurs dans le département de la Mayenne, consiste à faire en sorte de compenser chaque année l'usure de l'année par un emploi suffisant de matériaux. Ce système, en absorbant chaque année une somme considérable pour l'entretien, prévient les déceptions de l'avenir et assure la viabilité, quelque circonstance défavorable qui puisse arriver. Sans doute il oblige d'ajourner la satisfaction de besoins très-légitimes, et peut retarder l'achèvement du réseau des voies de communication d'ordre secondaire, mais il nous semble plus réellement conforme à l'intérêt public, et voilà pourquoi partout les ingénieurs résistent le plus qu'il peuvent, au risque de se faire accuser d'avoir de mauvais caractères, à des entraînements regrettables.

Il ne faudrait pas qu'on crût que les inconvénients du premier système se révèlent promptement; un calcul bien simple va le démontrer.

Supposons une chaussée de 15 centimètres d'épaisseur, ayant une circulation moyenne de 100 colliers chargés; nous évaluons à 30 mètres cubes de très-bons matériaux par kilomètre et par 100 colliers l'usure annuelle. Si l'on n'applique que 15 mètres cubes, on réalisera certainement une forte économie sur l'entretien; mais la chaussée perdra l'équivalent des 15 mètres non employés, qui, pour une largeur de 4 mètres, font un peu moins de 4 millimètres. En dix ans, la chaussée aura perdu 37 millimètres; elle sera encore viable avec 11 centimètres d'épaisseur. Dix ans après, elle n'aura plus que moitié de son épaisseur primitive, soit 0m.075. Si le sous-sol est argileux ou glaiseux, elle sera complétement défoncée; si le sous-sol est sablonneux, elle pourra résister encore, mais, dans ce dernier cas, au bout des dix autres années elle sera perdue complétement.

On voit, par ce simple calcul, que des chaussées insuffisamment entretenues peuvent se maintenir longtemps viables sans que le public qui les parcourt s'aperçoive de leur état défectueux; mais il arrive toujours un moment où il faut solder cet emprunt fait au capital. Ce moment est venu pour les routes impériales et départementales; il viendra dans quelques années, et dans des proportions bien plus grandes, pour les chemins vicinaux insuffisamment pourvus d'entretien.

Voilà pourquoi, encore bien que la comparaison des dépenses d'entretien des chemins confiés aux ingénieurs présente un avantage sur les dépenses de même nature des chemins confiés aux agents voyers, nous n'attachons à ce fait qu'une importance très-secondaire, ni les uns ni les autres n'ayant, en général, la possibilité d'employer à l'entretien tous les crédits qu'ils pensent être nécessaires.

DÉPENSES DE PERSONNEL.

Il est évident, *à priori*, que le personnel spécial des agents voyers, dans le groupe de départements où un personnel entièrement spécial existe, doit coûter plus cher que le personnel dans le groupe de départements confiés aux ingénieurs, puisque, dans le premier, il faut payer tout un état-major que l'État fournit dans le second, et se priver, en outre, du concours de l'expérience et du zèle des conducteurs formés par une longue pratique et une hiérarchie parfaite.

Dans la première partie de ce mémoire, nous ne nous sommes occupé que des travaux des chemins de grande communication, nous donnons ici les chiffres afférents au personnel de toute la vicinalité : grande, moyenne et petite.

1° *Groupe des départements placés sous la direction des ingénieurs.*

DÉPARTEMENTS.	DÉPENSES de personnel de la vicinalité en 1861.	DÉPENSES de personnel de la vicinalité en 1865.	AUGMENTATION de 1861 à 1865.	OBSERVATIONS.
	fr.	fr.	fr.	
Eure-et-Loir.	43 300	43 900	600	
Mayenne (*).	36 600	41 000	4 400	L'augmentation porte exclusivement sur les dépenses de la petite vicinalité.
Côtes-du-Nord . . .	59 000	63 000	4 000	
Moyennes.	46 300	52 633	6 333	

(*) Dans le département de la Mayenne, le service de la grande vicinalité est seul dans les attributions des ingénieurs; néanmoins les chiffres donnés dans les colonnes ci-dessus se rapportent à tout le personnel. Cette organisation est reconnue défectueuse en ce qui concerne la petite vicinalité. (Rapport du préfet au conseil général, 1865, page 100.)

2° *Groupe des départements placés sous la direction exclusive d'agents voyers.*

DÉPARTEMENTS.	FRAIS de personnel en 1861.	FRAIS de personnel en 1865.	DIFFÉRENCE en plus.	Observations.
	fr.	fr.	fr.	
Calvados.	61 200	74 100	12 900	
Eure.	89 873	103 936	14 063	
Finistère.	41 800	51 700	9 900	
Ille-et-Vilaine.	66 157	73 600	7 443	
Loir-et-Cher.	45 000	50 512	5 512	
Loire-Inférieure.	68 392	70 000	1 608	
Manche.	59 860	67 300	7 440	
Maine-et-Loire.	55 400	65 700	10 300	
Morbihan.	52 400	52 400	"	
Orne.	56 400	57 600	1 200	
Sarthe.	59 540	75 700	16 170	
Seine-et-Oise.	89 800	100 100	13 000	
Moyennes.	61 652	69 721	8 069	

En comparant les moyennes du premier tableau aux moyennes du second, on voit que, dès 1861, le personnel des agents voyers coûtait dans chacun des douze départements du second groupe 15 352 francs par an de plus que le personnel du premier groupe; qu'en 1865 la différence est encore plus grande, puisqu'elle s'élève à 17 088 francs, ce qui fait, par an et pour douze départements, une différence de 205 056 francs.

En dix ans, la somme s'élève a 2 050 560 francs; en vingt ans, à plus de 4 millions.

Ainsi dépense plus grande en personnel pour des résultats plus dispendieux sans être meilleurs, tel est définitivement le résultat de l'organisation qui, dans les départements que nous avons considérés, a fait préférer les agents voyers aux ingénieurs.

Nous souhaiterions qu'un semblable travail comparatif fût fait pour la France entière, il conduirait à des résultats absolument identiques; mais alors ce n'est plus par dizaines, mais par centaines de millions que se chiffrera la perte causée par la fausse mesure qui a fait abandonner le concours d'hommes instruits dévoués, animés au suprême degré de l'amour du bien public.

Ceci prouve que, même pour les travaux les plus modestes, de fortes études et une organisation administrative solide ne sont pas inutiles.

Laval, le 18 décembre 1866.

N° 146

NOTE

Sur les barrages mobiles du système Poirée et du système Chanoine qui fonctionnent simultanément pour les éclusées de l'Yonne.

Par M. CAMBUZAT, ingénieur en chef des ponts et chaussées.

J'ai lu avec intérêt, dans le dernier numéro des *Annales des ponts et chaussées* (mars et avril 1866), l'étude comparative des divers systèmes de barrages mobiles faite par M. l'ingénieur de Lagrené.

Le double service de navigation qui m'est confié (savoir le canal du Nivernais et la rivière d'Yonne), comprend, entre Decize et Montereau, 8 barrages mobiles à fermettes du système Poirée qui fonctionnent tous, et 19 barrages à hausses du système Chanoine, parmi lesquels 6 seulement fonctionnent à chaque éclusée depuis deux à quatre ans, les autres n'étant pas terminés ou ne devant fonctionner que quand le nouveau système de navigation continue sera entièrement achevé entre Laroche et Montereau, ce qui aura lieu en 1867. Il est peut-être utile de faire connaître aux lecteurs des *Annales* les observations suivantes, relatives aux 10 barrages qui sont manœuvrés à chaque éclusée entre Auxerre et Montereau, c'est-à-dire 90 à 100 fois par an.

Entre Auxerre et Montereau, il existe 4 barrages à fermettes; ce sont ceux de la Chaînette, d'Épineau, de Joigny et de Port-Renard. La hauteur des fermettes de ces 4 barrages varie de $2^m.25$ à $2^m.45$.

Le barrage de la Chaînette à Auxerre a été construit en 1859 et 1860, avec radier en pierre; les tourillons des fermettes sont engagés dans un seuil en pierre et dans des crapaudines en fonte. Ce barrage a un échappement du système Salmon. Il n'a éprouvé aucune espèce d'avarie depuis six années qu'il fonctionne. Il n'y a point d'affouillement à l'aval; le fond du lit est un rocher feuilleté qui n'est pas très-résistant.

Les deux barrages d'Épineau et de Joigny ont été construits de 1837 à 1840, avec le grillage en bois primitif de M. Poirée; à Épineau, le grillage a été scellé l'année dernière, et ne se soulève plus; au barrage de Joigny, qui va être démoli l'année prochaine parce qu'il sera remplacé par un barrage Chanoine en construction à 400 mètres en aval, le grillage en bois se soulève fréquemment. Ces deux barrages ont des échappements à excentriques; ils ne présentent à l'aval du radier que des affouillements peu considérables.

Enfin le barrage de Port-Renard, du système Poirée, achevé en 1856, a un seuil en bois scellé dans un radier en pierre et des crapaudines en fonte; rien n'a bougé à ce barrage, qui va être exhaussé l'année prochaine, et qui restera avec ses fermettes dans le système de navigation continue; il ne s'est formé d'affouillement inquiétant que le long du bajoyer vertical de l'écluse, le barrage étant situé au tiers de la longueur de ce bajoyer en partant de l'amont.

Les 6 barrages à hausses Chanoine qui fonctionnent à chaque éclusée entre Auxerre et Montereau ont été construits de 1860 à 1864; ce sont ceux de Monéteau, de Bassou, de Villeneuve-sur-Yonne, de Saint-Martin, de Champfleury et de Cannes.

Il y a déjà eu plusieurs avaries à ces barrages; des barres à talons et des chevalets ont été cassés, ou bien un caillou, un morceau de bois engagé sous la barre à talons

ou dans une glissière, a empêché l'abatage d'une ou de plusieurs hausses; quand ces avaries arrivent de jour, les bateaux et trains passent par l'écluse, si toutefois l'éclusée n'est pas déjà trop affaissée; mais quand ces accidents arrivent la nuit, l'éclusée est ordinairement perdue. Sous l'action répétée de l'eau des éclusées, il se produit des affouillements en aval des radiers, même dans le rocher et dans le tuf. A la sortie des passes des barrages de Villeneuve et de Saint-Martin, il s'était formé des affouillements de 4 à 5 mètres dans le gravier et dans la craie; nous avons établi des arrière-radiers en gros enrochements, qui résistent très-bien en aval des barrages de Villeneuve, de Saint-Martin, de Champfleury et de Cannes. Il faut noter que les affouillements ont lieu surtout en aval des passes navigables, et sont, au contraire, peu sensibles en aval des déversoirs.

Voilà des faits positifs, il reste maintenant à les expliquer.

D'abord tous nos barrages (*) à hausses Chanoine sont destinés à une navigation continue, et ont leur couronnement à 3 mètres au-dessus du seuil de la passe navigable; ce n'est que temporairement qu'ils fonctionnent pour les éclusées, et jamais la retenue n'atteint le niveau futur: le maximum de l'éclusée s'élève au plus à $0^m.30$ en contre-bas du couronnement des hausses. Avant l'arrivée de l'éclusée, les hausses du déversoir sont en bascule; on abat les hausses de la passe pour faire passer l'éclusée et les embarcations.

Les chocs répétés des chevalets sur le radier, la présence d'une pierre ou d'un morceau de bois, voilà les causes qui occasionnent la rupture des barres à talons et

(*) Ces barrages ont une passe large de 35 mètres avec un seuil placé à $0^m.60$ en contre-bas de l'étiage et un déversoir long de 50 à 60 mètres, avec un couronnement élevé de $0^m.50$ au-dessus de l'étiage.

des chevalets, et empêchent quelquefois l'abatage des hausses. L'ouverture rapide de la passe s'opérant environ en deux minutes, projette en aval une masse énorme d'eau qui agit avec une grande violence sur le fond du lit, et cela deux fois par semaine.

Quand la navigation sera continue, et que les hausses de la passe ne seront plus manœuvrées que pour les crues ou les chômages, c'est-à-dire cinq ou six fois par an tout au plus, les inconvénients actuels ne se présenteront plus.

L'ouverture de la passe des barrages à fermettes est moins rapide, et la vitesse de l'eau qui se précipite en aval est beaucoup moins grande; de là une moindre force d'affouillement.

Avec les barrages à fermettes, il y a réellement du danger pour les hommes qui les ouvrent en temps de pluie, de gelée ou de crue et pendant la nuit (*), tandis que la manœuvre des barrages à hausses n'offre pas de danger pour les éclusiers.

Je n'ai jamais remarqué que les barrages à fermettes fussent, sur l'Yonne, une cause d'insalubrité par l'arrêt des corps flottants.

En résumé, les barrages à hausses Chanoine ont été projetés pour établir sur l'Yonne une navigation continue, et tout me porte à croire qu'ils rempliront très-bien l'objet auquel ils sont destinés; mais ils offrent pour la navigation intermittente avec le système des éclusées tel qu'il existe sur cette rivière, moins d'avantage que les barrages à fermettes Poirée.

Auxerre, le 15 novembre 1866.

(*) Au barrage d'Épineau, en 1859, un de nos éclusiers s'est noyé en débouchant à l'arrivée d'une petite crue; très-souvent nos agents tombent à l'eau pendant le débouchage des barrages à fermettes.

N° 147

EXAMEN SOMMAIRE

du traité de la stabilite des constructions (1re partie) *du docteur* SCHEFFLER.

(Traduction de M. Victor FOURNIÉ.)

Par M. CH. LE BLANC, ingénieur des ponts et chaussées.

M. Victor Fournié a publié en 1864 la traduction de la première partie d'un *Traité de la stabilité des constructions*, par M. le docteur Hermann Scheffler, conseiller des travaux publics du duché de Brunswick.

La traduction est annotée, et précédée d'un avis, dans lequel le traducteur donne l'approbation la plus entière aux doctrines de l'auteur, et déclare que l'ouvrage *mériterait de devenir classique* (p. 6) (*).

Or le docteur Scheffler introduit dans l'art des constructions deux *innovations capitales* (p. 6). Il énonce et démontre, *à sa manière* (p. 1), *une nouvelle loi de statique susceptible d'applications pratiques très-importantes à l'art des constructions* (p. 1), en même temps qu'il repousse, *comme sans fondement, approximativement vraie dans certains cas, mais fausse dans d'autres, l'hypothèse de Navier relativement à la répartition des pressions sur la surface des joints* (p. 220).

Dans son cours autographié, 1842-1843, M. Belanger dit :

Lorsqu'un prisme est sollicité par des forces inclinées par

(*) Les passages en italique sont des citations.

*rapport à la longueur, il se courbe, et l'*ON ADMET *que les éléments matériels qui se trouvaient primitivement dans une section perpendiculaire aux arêtes, restent encore, après leur déplacement, dans un plan normal aux courbes qui remplacent ces arêtes rectilignes.*

Cette hypothèse sert de base à tout le calcul de la résistance des matériaux. C'est elle dont le docteur Scheffler nie la légitimité.

Une négation aussi hardie est de nature à ébranler tout d'abord la confiance du lecteur. Cependant elle émane d'un homme connu par d'assez nombreuses publications relatives à l'art des constructions, et elle se produit en France avec l'appui d'un ingénieur.

Le docteur Scheffler aurait-il raison? Faut-il abandonner, à son exemple, la majeure partie des progrès que l'art des constructions croyait avoir réalisés depuis le commencement du siècle, en revenir aux formules empiriques, et à l'imitation plus ou moins servile de ce qui a été fait? La nouvelle loi de statique qu'il annonce permettra-t-elle, au moins, de combler en partie le vide immense créé par le rejet de l'hypothèse de Navier? C'est ce que je me propose d'examiner, très-sommairement d'ailleurs, dans cet article.

Le docteur Scheffler ne me paraît pas avoir saisi toute la portée de sa négation.

Certes, pour justifier le rejet d'une hypothèse aussi généralement adoptée, et sur laquelle tant de beaux travaux ont été édifiés, il fallait, ou donner une preuve sans réplique, ou présenter au moins de nombreuses considérations tendant à créer une forte probabilité. Or on ne trouve rien de semblable dans le traité.

Après s'être longuement étendu sur les courbes des pressions considérées dans des voûtes formées avec des voussoirs incompressibles, et sur les conditions nécessaires à la stabilité de semblables voûtes, l'auteur introduit enfin la

considération de la résistance limitée des matériaux, et, sur ce point, il se borne à dire *qu'on manque de connaissances sur la compressibilité des voussoirs* (p. 70), et à conseiller aux constructeurs de vérifier la stabilité d'une voûte formée avec des matériaux compressibles par le procédé suivant : *on enlèvera deux zones extérieures et intérieures, ayant chacune un quart de l'épaisseur à chaque joint, et l'on appliquera à la partie restante les règles données dans le cas de matériaux incompressibles* (p. 67).

C'est très-incidemment, et dans le cours d'un examen critique de l'article publié en 1853, dans nos *Annales*, par M. Carvallo, que l'auteur exprime (p. 220) sur l'hypothèse de Navier, l'opinion que j'ai rapportée plus haut, sans la motiver autrement qu'en déclarant *qu'il range parmi les absurdités, la conséquence* que M. Carvallo tire de l'hypothèse, *lorsqu'il en conclut que la courbe des pressions peut en réalité s'approcher des courbes-contours* (extrados et intrados) *de la voûte, au plus, à une distance égale au tiers de l'épaisseur du joint; dans le cas d'un plus grand rapprochement de l'une des courbes-contours, les points voisins de l'autre subiraient des pressions négatives, ou forces répulsives, ce qui veut dire que la rupture s'ensuivrait.*

Ces forces répulsives seraient en effet une conséquence remarquablement absurde ; mais je ne sais pas où le docteur Scheffler les a rencontrées ; ce n'est certainement pas dans l'article de M. Carvallo.

La négation du docteur Scheffler est donc une opinion purement personnelle, produite isolément, et sans aucune preuve à l'appui.

Le traducteur, qui a remarquablement analysé l'ouvrage dans son avis, cherche à suppléer au silence de l'auteur (p. 9, et note p. 61). Mais, pour que son objection fût applicable à la résultante des pressions sur un plan de joint, il faudrait que l'action des pressions élémentaires sur les voussoirs compressibles en contact fût la même que celle

d'une force unique égale à leur résultante, et appliquée au point où la direction de cette résultante coupe le plan de joint. Or, bien que notre enseignement de la statique laisse beaucoup à désirer, ainsi que le prouve le nombre des programmes différents de cet enseignement (trois) que notre génération a vu mettre successivement à l'épreuve, j'ai peine à croire qu'il soit nécessaire de démontrer aujourd'hui que ces actions sont essentiellement différentes.

Rassurons-nous donc, le calcul de la résistance des matériaux est encore debout. Nous ne sommes pas voués nécessairement à l'empirisme, et en ce qui concerne les voûtes et, en général, les ouvrages en maçonnerie, nous pouvons conserver notre confiance dans la méthode féconde et vraiment scientifique de M. E. Méry.

Sans doute, cette méthode n'est pas sortie définitive et entièrement pratique de l'article publié, en 1840, par son auteur, dans nos *Annales*, et je ne dois pas être le seul à regretter le silence gardé, depuis cette publication, par M. Méry ; mais elle contenait, dès lors, tous les éléments nécessaires au développement qu'elle a reçu depuis entre les mains des ingénieurs.

L'expérience a surabondamment prouvé qu'on peut être assuré de la stabilité d'un ouvrage en maçonnerie dans lequel une courbe des pressions calculée, en tenant compte de toutes les forces mises en jeu, occupe une position telle, que si les pressions auxquelles cette courbe correspond venaient à se produire, aucun point de l'ouvrage ne serait exposé à un écrasement ou à un glissement.

L'indétermination, dont le docteur Scheffler fait un reproche à la méthode de M. Méry (p. 211), n'existe plus dès qu'on s'est imposé un maximum de pression, et qu'on s'est donné pour règle de ne s'arrêter qu'à la courbe qui donne ce maximum sur deux au moins des points exposés aux plus fortes pressions.

A l'aide de cette méthode, tout ingénieur et même tout

conducteur exercé peut déterminer presqu'à coup sûr les dimensions les plus convenables pour un ouvrage en maçonnerie, en tenant compte de toutes les circonstances, y compris celles de la construction; comme, par exemple, des poussées latérales auxquelles les viaducs (ou ponts sous rails) sont exposés, pendant la période de construction, dans les remblais élevés de chemin de fer qu'on exécute sur toute leur hauteur à la fois, avec de grands wagons de terrassements. Je crois que les constructeurs sont moins disposés que jamais à l'abandonner pour revenir aux tables et aux méthodes empiriques!

Les géomètres qui ont abordé la difficile question des actions moléculaires dans les corps solides naturels, n'ont pas, que je sache, discrédité l'hypothèse de Navier. Qu'ils arrivent à la remplacer par une loi démontrée, tout le monde y applaudira. Mais comme l'hypothèse a été vérifiée dans la pratique par la concordance des résultats auxquels elle conduit avec ceux de l'expérience, elle restera nécessairement une approximation suffisante de la loi, et elle continuera à servir de base à une grande partie de l'art des constructions.

On n'a pas abandonné la loi de Mariotte parce que des expériences d'un merveilleuse précision ont prouvé qu'elle n'était pas absolument vraie.

J'arrive à la *nouvelle loi de statique.*

En voici textuellement l'énoncé (p. 4):

Parmi tous les groupes d'une même classe (de réactions), *celui-là seul est possible pour lequel, en vertu des propriétés physiques du système, les composantes* Q_1. Q_2, Q_3, Q_4, *perpendiculaires à la direction* PM (direction de la résultante des forces extérieures, autres que les réactions des points d'appui, sur le système considéré), *sont simultanément un minimum.*

Un pareil énoncé suppose de nombreux préambules; et en effet, il y en a plusieurs pages, que je n'entreprendrai

pas d'analyser. Mais la loi, d'après le docteur Scheffler, a déjà été énoncée par Moseley.

Or, l'énoncé de Moseley, s'il ne paraît pas irréprochable au docteur Scheffler, a du moins le mérite de la simplicité. Le voici (p. 12):

Quand un groupe de forces est en équilibre et qu'il s'y trouve un certain nombre de réactions, chacune de ces dernières est un minimum eu égard aux conditions dans lesquelles se trouve le système entier.

Voici maintenant, partie en résumé, partie textuellement, la démonstration de M. Scheffler (p. 6).

Un système (de corps solides naturels?) est en équilibre sous l'action de forces extérieures et de réactions provenant de plusieurs surfaces d'appui. Les forces extérieures ont une résultante PM. Je décompose les réactions en composantes P_1, P_2, P_3, P_4, parallèles, et en composantes Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, normales à PM.

Qu'on imagine des tiges inflexibles dans les directions $M\alpha, M\beta, M\gamma, M\delta$ (parallèles à Q_1, Q_2, Q_3, Q_4), *reliées invariablement au point* M (point invariablement lié lui-même au système).

Je suppose les surfaces d'appui *invariablement reliées aux tiges respectives* $M\alpha, M\beta, M\gamma, M\delta$. *Enfin, au lieu de la résultante* PM, *j'admets que le système est soutenu par une tige inflexible partant de* M, *et appuyée en* N *à un point de sa direction* (de la direction de PM) *supposé fixe.*

Le système donné est en équilibre grâce à la résistance des tiges MN, $M\alpha$, *etc., sur lesquelles toutes les composantes des réactions se reportent par le moyen de liaisons invariables. L'équilibre a lieu ainsi comme il aurait lieu par la résistance des* surfaces d'appui, *et* IL EST CLAIR *que les tensions exercées sur les tiges* $M\alpha, M\beta, M\gamma, M\delta$, *seront respectivement égales aux composantes* Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, *tandis que la tension de la tige* MN *conserve la valeur constante* $P = P_1 + P_2 + P_3 +_4$.

Ici je m'arrête. Ce point fixe N, qui assure à lui seul l'équilibre du système, et qui réduit à néant le rôle des surfaces d'appui, ne me permet pas de suivre le docteur Scheffler dans les conséquences qu'il va tirer, de ce *qu'il est clair*, à ses yeux, que les tensions exercées sur les tiges $M\alpha$, etc., sont respectivement égales à Q, Q_1, etc.

La nouvelle loi de statique reste donc à démontrer.

Voyons au moins si elle se vérifie dans un cas particulier.

Un fil flexible est attaché par ses deux extrémités à des point fixes; un anneau, que traverse le fil, est sollicité par une force verticale. Faisons abstraction du poids du fil, de sa roideur et du frottement, et cherchons à déterminer la position de l'anneau à l'aide de la nouvelle loi, c'est-à-dire par la considération que cette position doit correspondre au minimum (simultané) des composantes normales à la direction de la résultante des actions extérieures, des réactions des points fixes.

Nous trouverons de suite deux solutions; car pourvu que l'anneau se place dans la verticale de l'un ou de l'autre des points fixes, il y aura minimum simultané des réactions normales à la résultante des forces extérieures, puisque ces réactions seront nulles.

Dira-t-on que je fais une fausse application de la loi; que celle-ci a pour seul objet de lever des indéterminations, et qu'on ne doit pas en faire usage dans le cas où elle serait en contradiction avec les autres lois de la statique?

Dans le cas très-simple d'équilibre à l'aide duquel je viens de mettre la loi nouvelle à l'épreuve, on peut résoudre la question de plusieurs manières différentes.

L'anneau n'exerçant pas de frottement, les deux parties du fil ont la même tension; la résultante des réactions est donc la bissectrice de l'angle formé par ces deux parties. Avec cette donnée, la détermination du point cherché n'est plus qu'un problème de géométrie élémentaire.

L'anneau peut-être assimilé à un point auquel une force verticale serait appliquée, et qui serait astreint à se mouvoir sur l'ellipse dont l'anneau occupe un point et dont les points fixes sont les foyers. Dans ces conditions, la force, pour être en équilibre, doit être normale à la courbe. Le point cherché est donc celui où la normale à l'ellipse est verticale.

Enfin, le principe des vitesses virtuelles nous apprend que l'équilibre ne peut avoir lieu qu'au point où tout déplacement infiniment petit, compatible avec le système du point d'application de la force verticale, se ferait horizontalement. Le point cherché est donc le point de contact de la tangente horizontale à l'ellipse définie ci-dessus.

Les différents principes sur lesquels ces démonstrations reposent ne sont pas subordonnés les uns aux autres. Ils sont absolus, comme il convient à de véritables principes scientifiques.

Il ne faudrait pas croire qu'après avoir débuté par une loi fausse, *qu'il déclarait susceptible d'applications pratiques très-importantes à l'art des constructions*, le docteur Scheffler a rempli son traité de propositions nécessairement inexactes. Il a échappé à cet écueil en ne faisant en réalité aucun ou presque aucun usage de cette loi.

Il croit en faire un usage assez fréquent parce qu'il l'invoque, à diverses reprises, pour déterminer le sens de la réaction d'une surface, en tenant compte du frottement. Sa préoccupation l'induit quelquefois en erreur, mais généralement, la réaction réelle a bien la direction qu'il déduit, sans nécessité, *de la nouvelle loi.*

Dans la théorie des voûtes, il s'en sert pour choisir parmi les courbes des pressions possibles, dans une voûte formée de matériaux incompressibles, celle qui correspond à la poussée mininum à la clef (p. 38), celle, par exemple, qui, dans une voûte en plein cintre ou surbaissée, touche l'extrados à la clef.

En résumé, les deux *innovations capitales* signalées dans l'avis placé en tête du traité par le traducteur, sont deux erreurs, et, il y a, suivant moi, énormément à rabattre des éloges prodigués à l'auteur dans cet avis. Néanmoins, l'ouvrage du docteur Scheffler n'est pas sans mérite, et je pense qu'il sera parcouru avec intérêt par les personnes qui s'occupent elles-mêmes de recherches relatives à la stabilité des constructions.

C'est, si je ne me trompe, l'œuvre d'un esprit chercheur qui trouve quelquefois, mais sur les traces duquel il ne faut s'engager qu'avec circonspection, parce qu'il ne suffit pas, pour être dans le vrai, de s'écarter des sentiers battus.

Dreux, le 1er mai 1866.

N° 148

NOTE

Sur la propriété du lit des cours d'eau naturels, fleuves et rivières navigables, flottables ou (*) non et ruisseaux.

Par M. BRABANT, chef de service des chemins de fer de l'Est.

---

1. *Exposé.* — Les questions concernant la propriété du lit des cours d'eau naturels ont, pour la plupart, donné lieu à beaucoup de controverses. Les principales ont été tranchées par des arrêts de la Cour de cassation, qui sont venus fixer la jurisprudence à leur égard. Mais il en reste encore dont la solution continue à présenter de l'incertitude.

Ayant eu plusieurs fois l'occasion de nous occuper de ces dernières, et leur étude nous ayant obligé à des recherches assez étendues, nous avons pensé qu'il pourrait être utile d'en faire connaître les résultats.

L'enchaînement qui existe dans les différentes questions relatives à cette matière nous a conduit à parler de celles qui déjà ont été résolues ou qui font l'objet de mémoires publiés dans les *Annales des ponts et chaussées.* Mais, pour ce qui les concerne, nous nous sommes abstenu de nous livrer à aucun développement.

Les principales questions qui se rattachent à la propriété du lit des différentes espèces de cours d'eau naturels, dans

(*) On a, dans cette note et par abréviation, supprimé le mot *flottable.* Souvent aussi les rivières non navigables ni flottables ont été désignées par la dénomination de petites rivières.

les diverses situations où ils peuvent se trouver, sont les suivantes :

1° A qui appartient le lit d'un cours d'eau dans son état naturel?

2° A qui appartient l'ancien lit que les eaux ont abandonné naturellement pour s'en former un nouveau?

3° A qui appartient l'ancien lit d'un cours d'eau détourné dans l'intérêt de travaux publics, sur des terrains acquis dans ce but soit par l'état, s'il exécute directement les ouvrages, soit par une compagnie concessionnaire?

4° A qui appartient l'ancien lit d'un cours d'eau desséché soit naturellement, soit par suite de travaux publics exécutés par l'état ou par une compagnie concessionnaire?

Ces questions sont applicables chacune aux fleuves et rivières navigables, à leurs bras non navigables, aux rivières non navigables et aux ruisseaux; ce qui multiplie beaucoup le nombre des cas à examiner.

PREMIÈRE QUESTION. — A qui appartient le lit d'un cours d'eau dans son état naturel?

2. *Fleuves et rivières navigables.* — De tous temps les fleuves et les rivières navigables ont été considérés comme faisant partie du domaine public, et ce principe ayant été consacré par l'article 538 du Code Napoléon, la propriété du lit de ce genre de cours d'eau ne donne lieu à aucune contestation.

3. *Bras non navigables des rivières navigables.* — Dans son traité *des usines sur les cours d'eau*, publié en 1840, M. Nadault de Buffon établit que les bras non navigables des rivières navigables font, comme celles-ci, partie du domaine public. Nous rapporterons ci-après ce qu'il dit à ce sujet (tome 1er, pages 252 et suivantes) :

« Les bras ou ramifications non navigables des rivières
« navigables sont assimilés à ces rivières elles-mêmes, et
« sont, à ce titre, considérés comme faisant partie du do-

« maine public. Il y a pour cela deux raisons principales :
« d'abord, à cause des variations et des changements fré-
« quents qui s'opèrent dans le lit naturel de toutes les ri-
« vières, rien n'assure que la navigation qui s'effectue au-
« jourd'hui dans le bras de droite ne sera pas obligée de se
« reporter, d'un moment à l'autre, dans le bras de gauche,
« et d'abandonner son ancienne direction si le thalweg du
« fleuve vient à subir un changement analogue ; car là où
« le tirant d'eau devient insuffisant il n'y a pas de navi-
« gation possible, et souvent des travaux de dragage, cu-
« rage, etc., sont insuffisants pour remédier aux effets du
« travail lent, mais continuel, des eaux courantes. Ainsi, lors-
« qu'une rivière navigable se bifurque ou se ramifie, on ne
« peut jamais savoir au juste quel est celui des divers bras
« que réclamera le service de la navigation à une époque
« ultérieure. Il était donc nécessaire que l'administration
« les conservât tous sous sa surveillance.

« Un autre motif non moins essentiel qui sert de base au
« même principe, c'est qu'à l'aide de dérivations et de saî-
« gnées faites dans de simples ruisseaux appartenant à une
« rivière navigable, on pourrait, en été, appauvrir cette ri-
« vière sur une longueur considérable et y gêner par là ou
« même y suspendre l'exercice de la navigation.

« Il est bien entendu qu'il ne s'agit pas ici des affluents
« non navigables des rivières du domaine public ni même
« des portions supérieures de ces rivières considérées en
« amont du point où commence la navigation ; car un cours
« d'eau quelconque ayant toujours caractère d'affluent d'un
« certain ordre pour le fleuve dans le bassin duquel vient
« définitivement aboutir le tribut de ses eaux, il n'en serait
« pas resté un seul dans le domaine commun.

« Lors même qu'une rivière n'est navigable qu'en cer-
« taines parties de son cours, ces parties doivent être ex-
« clusivement considérées comme faisant partie du domaine
« public. »

M. Nadault de Buffon termine en citant les neuf arrêts suivants du conseil d'État qui assimilent aux cours d'eau navigables les bras non navigables qui en dépendent. Ils sont en date des 22 janvier 1824, 29 août 1824, 27 avril 1825, 27 août 1825, 21 juin 1826, 28 janvier 1835, 11 février 1836, 9 août 1836 et 4 avril 1837.

4. *Rivières non navigables.*—Les rivières non navigables sont les cours d'eau qui ont soulevé le plus de controverses. Cinq opinions différentes se sont produites :

1° Les uns les ont considérés comme n'appartenant à personne et faisant partie des choses dont l'usage est commun à tous;

2° D'autres comme faisant partie du domaine public;

3° D'autres comme appartenant à l'état;

4° D'autres comme appartenant aux propriétaires riverains;

5° Enfin il en est qui ont considéré l'eau comme n'appartenant à personne et le lit comme appartenant aux propriétaires riverains.

Ces quatre dernières opinions sont aujourd'hui condamnées. La première seule a prévalu, et son triomphe a été consacré par plusieurs arrêts de la Cour de cassation qui ont fixé la jurisprudence sur cette matière d'une façon incontestable, parce qu'ils sont motivés dans des termes qui les rendent d'une application générale. Parmi ces arrêts, nous citerons ceux en date des 11 février 1834, 10 juin 1846, 17 juin 1850, 23 novembre 1858, 6 mai 1861 et 8 mars 1865.

Après ces arrêts et après les mémoires publiés dans les 4ᵉ et 6ᵉ cahiers des *Annales des ponts et chaussées* en 1847 et 1856 par MM. Cotelle et Olivier sur les rivières non navigables, nous croyons n'avoir rien à ajouter sur une question à l'égard de laquelle la discussion est épuisée. Mais nous donnerons ci-après quelques extraits des arrêts de la

Cour suprême parce qu'ils contiennent la meilleure démonstration qui puisse être faite de la doctrine qui a été admise, celle qui a le plus d'autorité et parce que nous y avons puisé les principes sur lesquels nous nous sommes appuyé pour traiter une partie des questions qui font l'objet de cette note.

5. *Extrait de l'arrêt du 10 juin 1846.* — « Attendu qu'un « cours d'eau se compose essentiellement et de ses eaux et « du lit sur lequel elles s'écoulent; que les eaux et leur « lit forment, par leur réunion, et tant qu'elle subsiste, « une seule et même nature de biens, et doivent, à moins « d'une volonté contraire exprimée formellement par la « loi, être régis par des dispositions identiques;

« Attendu que l'article 644 du Code civil confère à celui « dont la propriété borde un cours d'eau non navigable ni « flottable *le droit de se servir de l'eau* à son passage pour « l'irrigation de ses propriétés, et à ceux dont cette eau tra« verse l'héritage le droit d'en user dans l'intervalle qu'elle « y parcourt, à la charge de la rendre à la sortie de leurs « fonds à son cours ordinaire;

« Attendu que ces droits d'usage spécifiés et limités, « sont exclusifs du droit à la *propriété* du cours d'eau;

« Attendu que, d'après l'article 563 du même Code, lors« qu'une rivière non navigable ni flottable se forme un « nouveau cours en abandonnant son ancien lit, les pro« priétaires des fonds nouvellement occupés prennent, à « titre d'indemnité, l'ancien lit abandonné; que cette at« tribution, faite par la loi, démontre qu'elle ne considère « pas l'ancien lit abandonné comme appartenant aux pro« priétaires riverains de cet ancien lit;

« Attendu que ces cours d'eau non navigables ni flotta« bles n'appartiennent point aux propriétaires riverains; « d'après les dispositions ci-dessus, ils rentrent dans la classe « des choses qui, aux termes de l'article 714 du Code civil, « n'appartiennent à personne, dont l'usage est commun à

« tous, et dont la jouissance est réglée par des lois de « police;

« Attendu qu'à la vérité les choses auxquelles s'ap- « plique l'article 714 sont distinctes des biens qui, d'après « l'article 713, n'ayant pas de maître, appartiennent à « l'état; mais qu'il suffit que la loi refuse aux propriétaires « riverains la propriété des cours d'eau non navigables « ni flottables, pour qu'il n'y ait pas lieu de leur accorder « une indemnité, à raison de l'occupation du lit formant « partie intégrante de ces cours d'eau, etc...

« Casse..... »

6. *Extrait de l'arrêt du 6 mai* 1861. — « Attendu que « Goutant n'aurait pu être déclaré propriétaire du lit de « la Vence, rivière qui n'est ni navigable ni flottable, par « suite obliger la compagnie à enlever les matériaux dé- « posés par elle dans le lit de cette rivière et obtenir des « dommages-intérêts, à raison de ce dépôt, qu'autant qu'il « aurait établi, par titre ou par une disposition de la loi, « que la moitié ou la totalité du sol du lit de la rivière, en « face de ses prés, lui appartenait.

« Attendu que Goutant ne produit aucun titre qui lui « attribue la propriété de tout ou partie du sol du lit de la « rivière, mais qu'il prétend que ce droit de propriété ré- « sulte en sa faveur de ce qu'il est riverain de la Vence, « soit par son pré dit de Méry, soit par celui dit Sous-le- « Pont, et que ce droit de propriété au profit des riverains « est établi par les articles 556, 557, 561, 644 et 645 du « Code Napoléon;

« Attendu que les alluvions (art. 556) sont attribuées « aux riverains, non comme propriétaires du lit de la ri- « vière, mais en compensation des inconvénients et du « dommage qui peuvent résulter pour leurs fonds du voi- « sinage des eaux; que les îlots sont attribués aux rive- « rains (art. 561), par cette raison qu'ils sont présumés « provenir des pertes que les riverains ont faites d'une

« partie de leurs fonds; que si l'article 557 du même Code « accorde au propriétaire de la rive découverte les relais « que forme l'eau courante en se retirant insensiblement, « c'est pour éviter les difficultés auxquelles donneraient « lieu incessamment les recherches des riverains, s'il leur « était permis de démontrer que la rive ne s'est décou- « verte d'un côté qu'à raison de l'invasion des eaux sur « le fonds de l'autre rive, et si les propriétaires des fonds « dont la rive aurait été insensiblement envahie avaient « eu le droit de réclamer, sur la rive découverte, une part « de terrain égale à celle qu'ils auraient perdue;

« Attendu que les dispositions des articles 644 et 645, « qui permettent aux propriétaires riverains de se servir « des eaux à leur passage pour l'irrigation de leurs « fonds, ou lorsque leurs fonds sont traversés par une « eau courante, de s'en servir dans l'intervalle qu'elle « y parcourt, loin de démontrer que les propriétaires « riverains sont propriétaires des eaux et du lit de la « rivière, prouvent tout le contraire, puisque le droit « de propriété donne celui d'user de la chose de la manière « la plus absolue, et que la loi n'a pu déterminer le droit « des riverains ou de celui dont le fonds est traversé par « une eau courante à l'usage de cette eau, qu'en admettant « que les cours d'eau n'étaient pas la propriété des ri- « verains;

« Attendu d'ailleurs que les dispositions de l'article 563, « qui porte que si la rivière se forme un nouveau lit en « abandonnant l'ancien, les propriétaires des fonds nou- « vellement occupés prendront, à titre d'indemnité, l'an- « cien lit abandonné, est la preuve la plus manifeste que « la loi n'a pas considéré les propriétaires riverains comme « propriétaires du lit du cours d'eau;

« Qu'ainsi l'arrêt attaqué, en décidant que Goutant n'é- « tait point propriétaire du lit de la Vence en face de ses « prés, qu'il n'avait par conséquent pas eu le droit de de-

« mander l'enlèvement des terres et déblais que la com-
« pagnie avait déposés dans cette partie du lit de la Vence,
« et des dommages-intérêts à raison de ce dépôt, n'a violé
« aucune loi ;

« Rejette. »

7. *Ruisseaux.* — Les géographes ont divisé les cours d'eau en trois espèces : les fleuves, les rivières et les ruisseaux ; mais cette division n'a pas été admise dans le Code Napoléon, où les cours d'eau forment seulement deux catégories :

Ceux navigables, qui font partie du domaine public,

Et ceux non navigables, qui n'appartiennent à personne et dont l'usage est commun à tous.

Il suit de là que les ruisseaux se trouvent compris, comme les petites rivières, dans la catégorie des cours d'eau non navigables, et doivent, en conséquence, être régis par des dispositions identiques.

Cependant il y a des jurisconsultes qui font une distinction entre les lits des rivières non navigables, dont ils dénient la propriété aux riverains, et les lits des ruisseaux, qu'ils leur accordent. Ils font valoir à l'appui de leur doctrine des arrêts de Cour impériale, le peu d'importance de certains ruisseaux, la résistance énergique qui a été faite par un grand nombre d'hommes éminents, dans le but de faire prévaloir le système qui accordait aux propriétaires riverains le lit des rivières non navigables, et l'analogie admise entre la classification des voies d'eau et des voies de terre par des auteurs qui assimilent les rivières navigables aux grandes routes, les rivières non navigables aux chemins vicinaux et les ruisseaux aux chemins ruraux, qui n'ont, disent-ils, d'utilité que pour les terres qu'ils traversent. Mais ils ne peuvent baser leur opinion sur aucune loi, et, de plus, ils se trouvent en contradiction avec les dispositions du Code Napoléon et avec les principes posés par la Cour de cassation. C'est ce

que nous allons démontrer, en établissant que les ruisseaux, comme les petites rivières, font partie des cours d'eau non navigables.

En effet, l'article 644 du Code Napoléon est ainsi conçu :

« Celui dont la propriété borde une eau courante, *autre* « que celle qui est déclarée dépendance du domaine pu- « blic par l'article 538, peut s'en servir à son passage pour « l'irrigation de ses propriétés.

« Celui dont cette eau traverse l'héritage peut même en « user dans l'intervalle qu'elle y parcourt, mais à la « charge de la rendre à la sortie de son fonds à son cours « ordinaire. »

Ce mot *autre* indique d'une façon manifeste que les auteurs du Code ont voulu par là désigner tous les cours d'eau qui ne font pas partie du domaine public, et, par conséquent, les ruisseaux aussi bien que les rivières non navigables ; sans quoi ils auraient donné des indications susceptibles de faire distinguer l'une de l'autre ces deux espèces de cours d'eau que bien souvent on peut confondre, et, de plus, ils auraient établi pour les ruisseaux des dispositions spéciales, comme ils l'ont fait pour les simples sources, par les articles 641, 642 et 643 du Code Napoléon. Cependant rien de semblable ne se rencontre dans le Code, où les ruisseaux ne sont pas désignés d'une manière spéciale, et si l'on rapproche ce silence des termes dans lesquels ont été rédigées les dispositions concernant les cours d'eau non navigables, on ne doit pas douter qu'elles ne soient applicables aux ruisseaux comme aux petites rivières.

On va voir par ce qui suit que la Cour de cassation a considéré les ruisseaux comme faisant partie des cours d'eau non navigables.

Dans son célèbre arrêt du 10 juin 1846, elle s'est constamment servi de la dénomination de cours d'eau non navigables, qui désigne aussi bien les ruisseaux que les petites rivières.

Elle a fait de même pour la plupart de ses arrêts, et notamment dans ceux des 21 juillet 1834, 14 et 17 décembre 1861, qui se rapportent à des ruisseaux. Enfin les principes qu'elle a émis à l'appui de ces trois arrêts sont rigoureusement les mêmes que ceux appliqués par elle dans des arrêts concernant des petites rivières ; d'où il résulte qu'elle considère ces deux espèces de cours d'eau comme faisant partie de la même catégorie, celle des cours d'eau non navigables.

Le conseil d'état ne procède pas autrement. Nous citerons comme exemple, parmi ses arrêts, ceux des 28 novembre 1861 et 15 juin 1864, concernant le fossé de Couillerville et le ruisseau du Vendage.

Dans son *Traité des usines sur les cours d'eau*, M. Nadault de Buffon ne fait aucune différence entre les ruisseaux et les rivières non navigables, ainsi qu'on peut le voir par les différents passages suivants :

(Tome II, p. 33.) « Le lit d'une *rivière* ou d'un *ruisseau* « se trouve-t-il abandonné ou mis à sec, il devient susceptible de propriété; mais il retombe en même temps dans « la classe des bien vacants et sans maître, qui, aux termes « de l'article 539 du Code civil, font partie du domaine « aliénable de l'état. C'est pourquoi ce lit abandonné peut « être vendu aux enchères, ainsi qu'on l'a fait, en 1825, « pour les parties du lit de l'Armançon, délaissées par suite « des prises d'eau du canal de Bourgogne, dans le département de l'Yonne. »

A la page 72, il rapporte l'opinion émise au sujet de l'eau d'un ruisseau, par M. le comte Merlin, dans un répertoire de jurisprudence où se trouve le passage suivant: « Un particulier ne peut disposer de l'eau d'un ruisseau, « comme il disposerait de celle d'une source prenant naissance dans sa propriété, attendu qu'il n'a que l'usage « des eaux de ce ruisseau, concurremment avec les autres « riverains. »

Dans les pages 75 et 76, il s'exprime ainsi : « Le chapitre précédent a été spécialement consacré à établir ce « principe que, sauf un seul cas d'exception, réservé par « la loi, en faveur des sources sur un terrain où elles pren« nent naissance, personne ne peut prétendre au droit « absolu de propriété sur les eaux courantes, tant qu'elles « restent dans leur lit naturel. » On voit par ce passage que, si M. Nadault de Buffon fait une exception pour les eaux de source, elle est conditionnelle, et qu'il n'en fait pas du tout pour les eaux d'un ruisseau.

Nous ferons remarquer ici :

1° Que l'opinion de ces deux auteurs est conforme au principe de notre jurisprudence, qui dénie aux particuliers la propriété des eaux courantes naturelles ; principe bien des fois consacré par la Cour de cassation, notamment :

Dans son arrêt du 10 juin 1846, où elle déclare que « les « droits d'usage des eaux, spécifiés et limités, par les arti« cles 644 et 645 du Code Napoléon, en faveur des pro« priétaires riverains, sont exclusifs du droit de propriété ; »

Et dans son arrêt du 6 mai 1861, où elle dit que « ces « dispositions du Code, loin de démontrer que les proprié« taires riverains sont propriétaires du cours d'eau, prou« vent tout le contraire ; »

2° Que, d'après l'article 552 du Code Napoléon, « la « propriété du sol emporte celle du dessus et du dessous ; »

3° Enfin que, d'après l'arrêt de la Cour de cassation, en date du 10 juin 1846, « le lit et l'eau dont se compose « un cours d'eau forment, par leur réunion, une seule et « même nature de bien et doivent être régis par des dispo« sitions identiques. »

Il suit de ce qui précède que l'eau d'un ruisseau ne peut appartenir aux riverains, et que du moment que la propriété de l'eau leur est refusée, ils ne peuvent prétendre à celle du lit.

Enfin, à la page 94, M. Nadault de Buffon dit positivement que les rivières et les ruisseaux n'appartiennent à personne.

En résumé, nous estimons que, d'après les lois en vigueur, d'après les principes posés par la Cour de cassation, et d'après les opinions des auteurs qui ont professé de saines doctrines sur la matière, les ruisseaux, comme les petites rivières, font partie des cours d'eau non navigables, et que par suite leurs lits n'appartiennent pas aux propriétaires riverains.

Nous n'avons rien dit ici sur les ruisseaux dont les eaux proviennent de rivières navigables, parce qu'il en est parlé dans l'article n° 3, concernant les bras et ramifications non navigables des rivières navigables, où nous rapportons un passage du traité de M. Nadault de Buffon, qui les classe, comme celles-ci, dans le domaine public (tome Ier, p. 252 et suivantes).

SECONDE QUESTION. — A qui appartient l'ancien lit que les eaux ont abandonné naturellement pour s'en former un nouveau?

8. *Fleuves et rivières navigables, flottables ou non.* — Cette question se trouve résolue par le simple énoncé de l'article 563 du Code Napoléon, dont la clarté nous dispense d'entrer ici dans aucun développement. Il est ainsi conçu :

« Si un fleuve ou une rivière navigable, flottable ou non, « se forme un nouveau cours en abandonnant son ancien « lit, les propriétaires des fonds nouvellement occupés « prennent, à titre d'indemnité, l'ancien lit abandonné, cha« cun dans la proportion du terrain qui lui a été enlevé. »

9. *Ruisseaux.* — En traitant la première question, relative à la propriété des cours d'eau dans leur état naturel, nous avons démontré que les ruisseaux, comme les petites rivières, font partie des cours d'eau non navigables, et que,

par suite, ils doivent être régis par les mêmes dispositions. Il suit de là qu'en cas de détournement, la propriété de leurs lits doit être réglée par l'article 563.

Troisième question. — A qui appartient l'ancien lit d'un cours d'eau détourné, dans l'intérêt des travaux publics, sur des terrains acquis dans ce but, soit par l'état, s'il exécute directement les ouvrages, soit par des compagnies concessionnaires?

Cette question doit être traitée dans deux hypothèses :

1° Dans celle où l'état exécute directement les travaux;

2° Et dans celle où l'exécution est confiée à une compagnie concessionnaire.

Première hypothèse. — Exécution par l'état.

10. *Fleuves et rivières navigables, et bras non navigables en dépendant.* — Lorsque les travaux entraînent le détournement d'un fleuve ou d'une rivière navigable, l'ancien lit continue d'appartenir à l'état, qui en a acquis un nouveau; mais alors il passe du domaine public au domaine privé.

11. *Rivières non navigables.* — Lorsque les travaux entraînent le détournement d'une rivière non navigable, l'état acquiert les terrains nécessaires pour le nouveau lit et s'empare de l'ancien. Au besoin il y établit ses ouvrages, et le surplus reste en sa possession comme domaine privé. Ce mode de faire n'est pas prévu dans nos lois, mais il est justifié par l'équité et par l'article 713 du Code Napoléon, aux termes duquel les biens vacants et sans maître appartiennent à l'état; enfin, il est conforme aux principes contenus dans l'article 563. De plus, il paraît suffisamment justifié par les arrêts de la Cour de cassation, en date des 10 juin 1846 et 6 mai 1861. A la vérité ces arrêts ne statuent pas sur la propriété des parties de lits occupés par des ouvrages, mais ils déclarent positivement que les riverains

n'ont aucun droit à faire valoir en raison de ces occupations.

Par le premier, elle a décidé que la loi refusant aux propriétaires riverains la propriété des cours d'eau non navigables, il n'y avait pas lieu de leur accorder d'indemnité, à raison de l'occupation du lit formant partie intégrante de ces cours d'eau;

Et par le second, que les riverains n'étant pas propriétaires du lit des cours d'eau non navigables, n'avaient le droit de demander ni l'enlèvement des terres et déblais qu'une compagnie avait déposés dans une partie d'un lit de rivière, ni dommages-intérêts à raison de ce dépôt.

Dans ce dernier arrêt, la Cour a fait une réserve pour le cas exceptionnel où un riverain pourrait prouver, par titre, qu'il est propriétaire du sol formant le lit de la rivière.

Quoi qu'il en soit, il existe encore des jurisconsultes qui sont d'avis que, dans le cas de détournement d'une rivière non navigable, fait pour l'exécution de travaux publics, l'ancien lit doit être abandonné aux riverains à titre d'indemnité, ou leur être payé s'il est pris pour l'établissement des ouvrages.

Pour qu'il pût en être ainsi, il faudrait que les riverains du cours d'eau détourné ne reçussent pas de dédommagement. On pourrait alors leur donner, comme compensation, l'ancien lit, bien que généralement il ne représenterait qu'une indemnité fort peu en rapport avec le dommage éprouvé, et le plus souvent trop faible.

Mais l'état payant toujours aux riverains des cours d'eau détournés pour travaux publics, des indemnités calculées de façon à les dédommager complétement de tout le tort qu'ils ont pu éprouver, il n'y a pas de motif pour leur allouer rien en sus.

Si donc on leur accordait encore, soit l'ancien lit, s'il a été abondonné, soit une indemnité équivalente, s'il a été occupé par les ouvrages, ce serait, d'une part, leur faire un don tout gratuit et, d'autre part, priver l'état, qui a

payé les indemnités dues, et le nouveau lit, d'une chose sur laquelle l'équité et l'esprit de l'article 563 du Code Napoléon lui donnent des droits incontestables.

12. *Ruisseaux.* — A l'égard des ruisseaux, la législation est la même que pour les rivièree non navigables.

SECONDE HYPOTHÈSE. — Travaux exécutés par des compagnies concessionnaires.

13. Les compagnies représentant l'état, il est évident que, pour le cas qui nous occupe, les choses doivent se passer de même que dans le précédent, pour ce qui concerne les riverains, et qu'il ne peut plus y avoir de débat sur la propriété des anciens lits qu'entre l'état et les compagnies concessionnaires.

Nous allons entrer, à ce sujet, dans quelques explications.

14. *Fleuves et rivières navigables et bras non navigables en dépendant.* — Lorsqu'une compagnie concessionnaire a détourné le cours d'un fleuve ou d'une rivière navigable pour l'exécution de travaux publics, on peut se demander si l'ancien lit reste la propriété de l'état ou s'il devient celle de la compagnie.

Si l'on consulte l'équité et l'esprit de l'article 563 du Code Napoléon, on doit penser que la compagnie, ayant acheté de ces derniers les terrains nécessaires pour l'établissement d'un nouveau lit, et payé, s'il y a lieu, des indemnités aux riverains, doit, à titre de compensation, devenir propriétaire de l'ancien lit; autrement, la compagnie se trouverait avoir fait toutes les dépenses et l'état un profit tout gratuit.

15. *Rivières non navigables et ruisseaux.* — Ce que nous venons de dire pour les cours d'eau navigables, nous le dirons à plus forte raison pour les cours d'eau non navigables, soit rivières, soit ruisseaux; c'est-à-dire que les anciens lits doivent devenir la propriété des compagnies concessionnaires et non celles de l'état.

QUATRIÈME QUESTION. — A qui appartient l'ancien lit d'un cours d'eau desséché soit naturellement, soit par suite de travaux publics?

Cette question présente deux cas : celui où le dessèchement s'est produit naturellement et celui où il est le résultat de travaux publics, exécutés soit par l'état, soit par une compagnie concessionnaire.

PREMIER CAS. — Dessèchement naturel du lit.

16. *Fleuves et rivières navigables ou non, et ruisseaux.* — Quand le dessèchement a lieu naturellement, les propriétaires riverains des cours d'eau se trouvent exactement dans la même position que s'il y avait eu détournement naturel; et comme, dans ce cas, l'article 563 du Code Napoléon n'accorde pas l'ancien lit aux riverains, ils ne doivent pas y avoir plus de droit quand il y a dessèchement naturel.

On ne peut nier que, dans l'une ou l'autre hypothèse, les propriétaires riverains peuvent éprouver des préjudices plus ou moins considérables; mais il faut voir, dans les dessèchements naturels comme dans les détournements naturels, des cas de force majeure, pour lesquels la loi n'accorde pas plus d'indemnités que pour les dommages occasionnés par les inondations, par la grêle ou par toute autre cause de même nature.

Néanmoins certains jurisconsultes sont d'avis que les lits desséchés naturellement doivent être abandonnés aux riverains. A l'appui de cette opinion, ils invoquent l'article 556 du Code Napoléon, qui leur attribue les alluvions « soit qu'il s'agisse d'un fleuve ou d'une rivière navigable, « flottable ou non. » Mais, dans les motifs à l'appui de l'arrêt de la Cour de cassation, du 6 mai 1861, il est dit « que les alluvions sont attribuées aux riverains, non comme « propriétaires du lit de la rivière, mais en compensation

« des inconvénients et des dommages qui peuvent résulter, « pour leurs fonds, du voisinage de la rivière. » Or, comme les eaux disparaissent quand il y a desséchement, il n'y a pas de compensation à donner, et le lit desséché doit être attribué à l'état, comme bien vacant et sans maître.

Second cas. — Desséchement résultant de travaux publics exécutés soit par l'état, soit par une compagnie concessionnaire.

17. *Fleuves et rivières navigables ou non, et ruisseaux.* — Si les travaux qui ont amené le desséchement du lit d'un cours d'eau ne donnent lieu à aucun dommage pour les propriétaires riverains, ou qu'ils ne leur en occasionnent que d'indirects, ils se trouvent dans la même position que si le desséchement avait eu lieu naturellement, et, par suite, ils n'ont droit ni à indemnité ni à l'ancien lit, qui deviendrait la propriété de l'état.

18. Si, au contraire, les travaux qui ont amené le desséchement avaient occasionné des dommages directs aux riverains, il se trouveraient alors dans la même position que s'il y avait détournement du cours d'eau et devraient être traités de la même manière. (Voir, à ce sujet, ce qui a été dit aux nos 10, 11 et 12, concernant la troisième question.)

19. *Observations concernant les différents cas de desséchement du lit des cours d'eau.* — Nos lois n'ayant pas prévu le desséchement des cours d'eau, nous ne pouvons invoquer, en faveur des doctrines que nous avons exposées, que l'esprit de certaines dispositions législatives, l'exemple de ce qui s'est pratiqué et les opinions de certains jurisconsultes.

Dans un passage de son traité *des usines sur les cours d'eau*, déjà cité par nous, au n° 7 à l'occasion des ruisseaux, M. Nadault de Buffon dit que le lit d'une rivière ou d'un ruisseau abandonné ou mis à sec doit faire retour à l'état, comme bien vacant et sans maître.

Dans son *Cours de droit administratif* (t. IV, p. 436, 3e édition), M. Cotelle s'exprime ainsi au sujet des indemnités qui pourraient être reclamées pour dommage indirect : « Si les concessionnaires d'un canal ou d'un chemin de fer ont pratiqué, sur des fonds acquis par expropriation, des fouilles profondes, et qu'ils détournent les eaux qui alimentent des abreuvoirs, des réservoirs et autres établissements existant en dehors du périmètre des travaux à exécuter, ils ne seront tenus à supporter aucune indemnité au profit des propriétaires qui seront privés de leurs eaux. Dans ce cas, la perte qu'ils en éprouvent est un cas fortuit, accidentel, qui ne pouvait pas être prévu, qui n'est que la conséquence indirecte du droit de la société de répondre aux exigences de l'intérêt public. »

20. *Conclusion relative aux lits desséchés.* — En résumé, nous estimons que les lits des cours d'eau, qui, dans leur état naturel, n'appartiennent pas aux riverains, ne peuvent jamais être revendiqués par eux après le dessèchement, et qu'ils doivent, aux termes de l'article 713 du Code Napoléon, devenir la propriété de l'état.

21. *Observation générale.* — Les personnes, qui auraient besoin de plus de développements pourront consulter les publications faites sur la matière. Nous leur recommandons particulièrement les écrits de MM. Tarbé de Vauxclairs, Merlin et Cotelle, et surtout le traité *des usines sur les cours d'eau* par M. Nadault de Buffon.

15 mai 1866.

N° 149

NOTE

Sur la détermination du nombre de passagers à admettre sur les bateaux (*).

Par M. KLEITZ, inspecteur général des ponts et chaussées.

Le nombre maximum de passagers à admettre sur un bateau, et leur répartition dans les divers compartiments, doivent être réglés de manière que, par leur déplacement, ils ne puissent imprimer au pont une inclinaison qui dépasse une certaine limite.

La détermination rigoureuse de ce nombre maximum exigerait l'étude de la question de l'oscillation d'un corps flottant, par l'effet du déplacement plus ou moins brusque d'une partie de son poids; mais en attendant qu'on ait la solution pratique de ce problème d'équilibre dynamique, on peut se proposer de chercher l'inclinaison du bateau dans le nouvel équilibre statique correspondant à ce déplacement; on pourra ainsi déterminer le nombre des passagers qui, par le plus fort déplacement que comportent les dispositions du bateau, lui imprimeraient une inclinaison d'équilibre maximum, à laquelle on assignerait une valeur moindre que celle qui serait réellement périlleuse. Ce sera un moyen d'expérimentation facile pour fixer le chargement maximum d'un bateau et, au besoin, sa répartition.

(*) Cette note a été rédigée pour le service de la commission de surveillance des bateaux à vapeur de Lyon, dont M. Kleitz était résident, et qui a appliqué le procédé qui y est exposé. — Son insertion aux *Annales des mines* et des *Ponts et Chaussées* a été décidée par M. le ministre sur la proposition de la commission centrale des bateaux à vapeur.

ÉQUILIBRE STATIQUE.

Je suppose un bateau de forme quelconque dont je désignerai le poids propre (*équipage, lest et combustible compris*) par P, et le poids de son chargement additionnel par Π.

Je rapporterai les points d'application des forces qui tiennent le bateau en équilibre au plan de flottaison AA_1, correspondant au poids $(P+\Pi)$, et à la verticale OH passant par le milieu de la largeur AA_1 (Pl. 134, *fig.* 1).

Dans cette position, le centre de gravité D du poids $(P+\Pi)$ se trouvera sur la même verticale que le point d'application de la résultante des pressions de l'eau, lequel n'est autre que le centre de gravité C du volume d'eau déplacée, ou le centre de carène.

Désignons :

Les coordonnées du poids P, par a et b;

Celles du poids Π, par ξ et ζ ;

Celles de la résultante de $(P+\Pi)$, par x et z;

Celles du point C, par x et y.

On aura, dans l'état initial du bateau :

$$(1)\qquad \begin{cases} (P+\Pi)x = Pa + \Pi\xi \\ (P+\Pi)z = Pb + \Pi\zeta. \end{cases}$$

Supposons maintenant qu'une partie du poids Π, désignée par p, soit portée d'un point M ayant pour coordonnées d et h, en un point M_1 ayant pour coordonnées d_1 et h_1, et que par suite de ce déplacement le bateau prenne une inclinaison α; cherchons les conditions du nouvel équilibre.

Dans cette position, les poids P et Π agiront perpendiculairement au nouveau plan de flottaison BIB_1. Le poids du bateau n'étant pas changé, le volume d'eau déplacée restera constant et les surfaces AIB et IA_1B_1 seront égales.

Les moments du poids $(P+\Pi)$ du bateau et du poids de l'eau déplacée seront égaux et de signes contraires.

On peut prendre ces moments par rapport à une ligne quelconque perpendiculaire à la section représentée par la figure, et, pour fixer les idées, je supposerai que ce soit par rapport à la ligne projetée en O, dont la position dans le bateau est bien déterminée.

Le moment du poids d'eau BFB_1 est égal au moment de AFA_1, agissant de gauche à droite, diminué du moment de ABI, agissant dans le même sens, et augmenté du moment de A_1B_1I, agissant en sens contraire. La somme de ces moments est donc égale à celle du poids AIA_1F, moins la somme des moments des poids égaux correspondant aux volumes ABI et IB_1A_1. En désignant par k le poids de l'un des prismes AIB pour une longueur ΔL du bateau, chacun de ces poids, pour le bateau entier, sera représenté par $\Sigma\Delta Lk$. Les pressions de l'eau donnent lieu à des moments égaux et opposés à ceux que je viens de définir.

On voit ainsi que les forces appliquées au bateau forment trois couples : 1° un couple de deux forces $(P+\Pi)$ appliquées en D et C; 2° un couple de deux forces p, appliquées aux points M et M_1 ; 3° un couple de deux forces $\Sigma\Delta Lk$, appliquées aux centres de gravité des volumes correspondant à AIB et A_1IB_1.

Je désigne par m et n les projections sur les plans AA_1 et OH de la distance variable qui, dans chaque section transversale, sépare les deux centres de gravité des deux prismes opposés $\Sigma\Delta Lk$. Les projections de la distance MM_1 sont d'ailleurs (d_1-d) et h_1-h. Par abréviation je les désigne par Δd et Δh, qui représenteront les déplacements que le poids p aura reçus suivant OA et suivant OH. Quant à la distance DC, dont la projection sur OA est nulle, elle est égale à $(z+y)$.

La condition du nouvel équilibre s'exprime donc par l'équation suivante :

$$(P+\Pi)(z+y)\sin\alpha+p(\Delta h\sin\alpha+\Delta d\cos\alpha)-\Sigma\Delta Lk(n\sin\alpha+m\cos\alpha)=0,$$

et en divisant par $\sin\alpha$, et en mettant pour $(\mathrm{P}+\Pi)z$ sa valeur (1), on a :

$$(2)\quad \mathrm{P}(b+y)+\Pi(\zeta+y)+p\left(\Delta h+\frac{\Delta d}{\operatorname{tang}\alpha}\right)=\Sigma\Delta \mathrm{L}k\left(n+\frac{m}{\operatorname{tang}\alpha}\right).$$

Pour simplifier encore, je pose :

$$(3)\quad \left(\Delta h+\frac{\Delta d}{\operatorname{tang}\alpha}\right)=\omega \quad \text{et} \quad \Sigma\Delta \mathrm{L}k\left(n+\frac{m}{\operatorname{tang}\alpha}\right)=\mathfrak{M}.$$

J'écris donc l'équation d'équilibre ainsi :

$$(4)\qquad \mathrm{P}(b+y)+\Pi(\zeta+y)+p\omega=\mathfrak{M}.$$

Pour un autre déplacement d'un poids p_1, caractérisé par une autre valeur ω_1 et donnant une seconde valeur $\mathfrak{M}_1$, l'équation serait :

$$\mathrm{P}(b+y)+\Pi(\zeta+y)+p_1\omega_1=\mathfrak{M}_1,$$

et en combinant cette équation avec la précédente, on a :

$$(5)\qquad p_1\omega_1-p\omega=\mathfrak{M}_1-\mathfrak{M}.$$

Nous verrons tout à l'heure que la quantité $\mathfrak{M}$ varie peu avec l'inclinaison α; de sorte que dans un bateau quelconque, dont le poids total est constant, le produit $p\omega$ varie également très-peu avec cette inclinaison. Nous appellerons cette quantité moment de déversement.

Si les murailles du bateau sont parallèles dans l'étendue de la plus grande oscillation, on peut facilement exprimer la valeur de la quantité $\mathfrak{M}$. Dans ce cas, l'axe de rotation I se confond avec le milieu O de la largeur AB (Pl. 134, *fig.* 2).

Je désigne par l la demi-largeur OB, et par ΔL l'élément de longueur applicable à cette largeur. Les projections sur AB et FH de la distance des centres de gravité des triangles AOA_1 et BOB_1, étant égales à $\frac{4}{3}\,l$ et à $\frac{2}{3}\,l\operatorname{tang}\alpha$, et la surface



de chaque triangle étant égale à $\frac{1}{2} l^2 \operatorname{tang} \alpha$, l'élément de $\mathfrak{M}$, correspondant au prisme d'une longueur ΔL, aura pour valeur :

$$1000^k \times \frac{1}{2} l^2 \operatorname{tang} \alpha \left(\frac{2}{3} l \operatorname{tang} \alpha + \frac{4}{3} \frac{l}{\operatorname{tang} \alpha} \right) \Delta L$$

et en réduisant :

$$\mathfrak{M} = \frac{1000}{3} \Sigma l^3 \Delta L (2 + \operatorname{tang}^2 \alpha). \tag{6}$$

La valeur de tang α étant au plus égale à 0,20, et celle de $\operatorname{tang}^2 \alpha$ égale à 0,04, on voit que, lorsque les murailles du bateau sont verticales (le bateau étant droit), la quantité $\mathfrak{M}$ est sensiblement constante et égale au moment d'inertie de la moitié de la section de flottaison, multipliée par le poids d'un mètre cube d'eau.

Dans ce cas, ce moment d'inertie pourrait être calculé directement.

Supposons, par exemple, la section de flottaison composée d'une partie rectangulaire comprise entre deux pointes à contours paraboliques, on aurait, en désignant par L la longueur totale de la section et par λL la longueur totale de l'avant et de l'arrière :

$$\Sigma l^3 \Delta L = L l^3 \left(1 - \lambda + \frac{16}{35} \lambda \right) = L l^3 \left(1 - \frac{19}{35} \lambda \right).$$

Si l'avant et l'arrière étaient triangulaires, on aurait :

$$\Sigma l \Delta L = L l \left(1 - \lambda + \frac{1}{4} \lambda \right) = L l \left(1 - \frac{3}{4} \lambda \right).$$

Mais il n'y a pas à s'arrêter à ces calculs, les expériences qu'on fera sur le bateau permettant de s'en dispenser.

En effet, ces expériences consisteront à opérer, sur le bateau, des déplacements de poids, et à observer, pour

chaque déplacement, l'inclinaison correspondante du bateau. En ramenant ces déplacements à l'état initial du bateau, c'est-à-dire en ajoutant (avec les signes convenables) les produits successifs des poids déplacés par les projections des déplacements correspondants, sur les plans coordonnés, on aura, par ces observations, des groupes de valeurs conjuguées :

$$[p_i,\quad (p_i\Delta h_i),\quad (p_i\Delta d_i),\quad \tang \alpha_i],$$

et chaque groupe donnera la valeur correspondante de :

$$p_i\,\mathfrak{D}_i.$$

Supposons qu'on fasse trois observations qui donneront

Pour $\tang \alpha_1$. . . . . . $p_1\mathfrak{D}_1$
Pour $\tang \alpha_2$. . . . . . $p_2\mathfrak{D}_2$
Pour $\tang \alpha_3$. . . . . . $p_3\mathfrak{D}_3$.

Ces valeurs successives de $p_1\,\mathfrak{D}_1$, $p_2\,\mathfrak{D}_2$ et $p_3\,\mathfrak{D}_3$ présenteront en général de faibles différences et, par une construction graphique, on pourra déterminer assez exactement la valeur du moment de déversement $p_\theta\,\mathfrak{D}_\theta$ correspondant à l'angle θ qu'on adoptera pour la plus grande inclinaison qu'il soit prudent d'admettre.

Ce résultat étant obtenu, on en déduira immédiatement quel serait le moment de déversement $p'_\theta\,\mathfrak{D}'_\theta$ pour la même inclinaison-limite θ et pour un autre poids Π' qu'on ajouterait au poids permanent P du bateau.

En effet, reprenons l'équation (4) et appliquons-la d'abord au cas où l'angle α aurait la valeur θ, avec le poids additionnel Π. Elle donnera :

$$(7)\qquad \mathrm{P}(b+y)+\Pi\zeta+\Pi y+p_\theta\mathfrak{D}_\theta=\mathfrak{M}_\theta.$$

Supposons maintenant qu'on enlève du bateau le poids Π, dont le point d'application avait pour coordonnées ξ et ζ,

et qu'on y mette le poids Π' dont le centre de gravité a pour coordonnées ξ' et ζ'.

Avec ce nouveau chargement le bateau est censé avoir son plan méridien principal dans la même position qu'avec le chargement d'épreuve Π, avant les déplacements partiels qu'on y a opérés.

Le nouveau plan de flottaison tracera donc, dans une section transversale quelconque du bateau, une ligne A'B' parallèle à celle AB qui marquait le plan de flottaison initial au commencement des expériences (*fig.* 3).

Appelons ε l'intervalle qui sépare ces deux plans, ou bien l'enfoncement du bateau correspondant au poids $(\Pi'-\Pi)$.

L'ordonnée du nouveau centre de carène C', par rapport au nouveau plan de flottaison, sera donnée par l'équation:

$$(P+\Pi')y' = (P+\Pi)(y+\varepsilon)+(\Pi'-\Pi)\frac{1}{2}\varepsilon.$$

Par rapport au nouveau plan de flottaison, l'ordonnée du poids P est $(b-\varepsilon)$ et celui de Π' est $(\zeta'-\varepsilon)$. De sorte que l'ordonnée z' du nouveau centre de gravité du poids $(P+\Pi')$, par rapport au nouveau plan de flottaison, sera donnée par l'équation :

$$(P+\Pi')z' = P(b-\varepsilon)+\Pi'(\zeta'-\varepsilon).$$

Cela posé, soit p' le poids qui, étant déplacé des quantités $\Delta h'$ et $\Delta d'$, dans les nouvelles conditions du bateau, lui imprimerait l'inclinaison θ.

En se reportant à la manière dont l'équation (2) a été obtenue, on aura d'abord :

$$(P+\Pi')(z'+y')\sin\theta+p'(\Delta h'\sin\theta+\Delta d'\cos\theta)-\Sigma\Delta L k'(n'\sin\theta+m'\cos\theta).$$

Et en substituant les valeurs trouvées ci-dessus pour (z' et y'):

$$(8) \qquad P(b+y)+\Pi y+\Pi'\zeta'-(\Pi'-\Pi)\frac{\varepsilon}{2}+p'_0\mathfrak{D}'_0=\mathfrak{M}'_0.$$

En retranchant l'équation (7) de la précédente, on a :

$$(9)\quad \Pi'\zeta' - \Pi\zeta - (\Pi' - \Pi)\frac{\varepsilon}{2} + p'_\theta \mathfrak{D}'_\theta - p_\theta \mathfrak{D}_\theta = \mathfrak{M}'_\theta - \mathfrak{M}_\theta.$$

Or, pour la même inclinaison θ, il est évident que le faible enfoncement ε ne peut sensiblement modifier le moment $\mathfrak{M}$, et que la différence $\mathfrak{M}'_\theta - \mathfrak{M}_\theta$ est extrêmement petite.

Donc on a, en la négligeant :

$$(10)\quad p'_\theta \mathfrak{D}'_\theta = p_\theta \mathfrak{D}_\theta + \Pi\zeta - \Pi'\zeta' + (\Pi' - \Pi)\frac{\varepsilon}{2}.$$

Il suffit par conséquent de connaître la position des centres de gravité des poids Π et Π', lorsque le bateau est droit (*ou, plus généralement, lorsque son plan méridien principal a la même direction*), pour qu'on puisse immédiatement déterminer pour l'angle-limite θ, le moment de déversement correspondant au chargement maximum Π', lorsque celui correspondant au chargement Π sera connu.

Désignons, le poids maximum des voyageurs à admettre sur le pont, par π';

Le poids maximum des voyageurs à admettre dans les salles basses, par π'';

Le poids maximum des marchandises à placer sur le pont, par π''';

Et les ordonnées de ces poids relativement au plan de flottaison, à l'origine des expériences, par $v'v''v'''$.

On aura d'abord :

$$(11)\quad \Pi'\zeta' = \pi'v' + \pi''v'' + \pi'''v'''.$$

Quant à l'enfoncement ε, il est facile à déterminer, et l'on déduira immédiatement la valeur ($p'_\theta\ \mathfrak{D}'_\theta$) de l'équation (10).

Supposons enfin que les plus forts déplacements possibles des poids π' et π'' des voyageurs soient $(\Delta h', \Delta d')$ et $(\Delta h'', \Delta d'')$, nous aurons l'équation :

$$(12)\qquad \pi'\left(\Delta h' + \frac{\Delta d'}{\tang\theta}\right) + \pi''\left(\Delta h'' + \frac{\Delta d''}{\tang\alpha}\right) = p_\theta \varpi_\theta + \Pi\zeta - \Pi'\zeta' + (\Pi' - \Pi)\frac{1}{2}\varepsilon.$$

Cette équation montre que lorsque le chargement maximum du bateau en service diffère notablement de celui des expériences, on commettrait une erreur sérieuse en appliquant à la détermination des poids maxima des voyageurs, seulement le premier terme du second membre de cette équation, sans avoir égard à la différence entre le chargement en service et celui des expériences. Comme d'ailleurs le terme $\Pi'\zeta'$ augmente proportionnellement à la hauteur à laquelle les voyageurs sont placés au-dessus du plan de flottaison, il importe de tenir compte de cette circonstance.

Il conviendra de donner à π' la valeur correspondant au nombre de voyageurs qu'il est possible de placer sur le pont, et de calculer ensuite π'' de manière à satisfaire à l'équation (12), en ayant, bien entendu, égard à la relation (11).

ÉQUILIBRE DYNAMIQUE.

Par la considération des trois couples de forces $(P + \Pi)$, p et $\Sigma\Delta Lk$, qui sollicitent le bateau dans toutes ses positions, on peut exprimer le travail de ces forces depuis l'état initial jusqu'à une inclinaison quelconque $\tang\alpha$ (*fig.* 4).

A l'origine du mouvement, lorsque le bateau est droit, les deux points d'application des forces du couple $(P + \Pi)$ sont éloignés, dans le sens de la verticale, à une distance $(z + y)$. Lorsque le bateau a l'inclinaison $\tang\alpha$, la projection de cette distance sur la verticale est égale à $(z + y)\cos\alpha$. Donc le travail du couple dont il s'agit, depuis l'origine jusqu'à l'inclinaison $\tang\alpha$, lequel travail est positif, est égal à

$$(P + \Pi)(z + y)(1 - \cos\alpha).$$

La projection M_1Q (*fig.* 5) de la distance MM_1 du déplacement du poids p, sur la nouvelle direction de la pesanteur, est égale à

$$\Delta h \cos\alpha - \Delta d \sin\alpha.$$

De sorte que le travail du couple p est exprimé par

$$p(\Delta h - \Delta h \cos\alpha + \Delta d \sin\alpha).$$

Cherchons maintenant le travail du couple formé par les poids k des deux prismes triangulaires AIA_1 et BIB_1 ayant une longueur ΔL (*fig.* 6).

Les projections de la distance entre les centres de gravité C et G_1 sur les plans coordonnés étant désignées par m et n, la projection de cette même distance sur la nouvelle direction de la gravité, est égale à

$$GP + G_1P_1 = SQ + P_1G_1 - SR = (m \sin\alpha - n \cos\alpha).$$

Je désigne cette projection par

$$\lambda = m \sin\alpha - n \cos\alpha.$$

Le travail du couple (k), pour un élément de longueur ΔL et pour une inclinaison α (travail négatif pour les pressions de l'eau) sera :

$$-\Delta L . k\lambda = -\Delta L . k(m \sin\alpha - n \cos\alpha).$$

Les valeurs de k, m et n sont des fonctions de α, dépendant de la forme du bateau.

Le travail total des trois couples de forces, depuis l'origine du mouvement jusqu'à une inclinaison quelconque α, aura pour expression :

$$(P + \Pi)(z + y)(1 - \cos\alpha) + p\Delta h(1 - \cos\alpha) + p\Delta d \sin\alpha - \Sigma\Delta L . k\lambda,$$

et en désignant $(P + \Pi)(z + y)$ par M, et le travail dont il

s'agit par $\mathfrak{T}$, nous aurons :

$$(13) \quad \mathfrak{T} = (M + p\Delta h)(1 - \cos\alpha) + p\Delta d\,s \quad \alpha - \Sigma\Delta L . k\lambda.$$

Par la démonstration détaillée de l'expression $-\Sigma\Delta L . K\lambda$ du travail des pressions de l'eau, on trouve la relation qui existe entre ce travail et le moment ($\mathfrak{M}$) de l'équation (4) de l'équilibre statique.

Désignons par $2l$ la largeur, variable avec l'inclinaison α, du bateau à la flottaison, dans la section correspondant à la longueur ΔL (*fig.* 7).

Le poids k de l'un des deux prismes AIA_1 et BIB_1 sera exprimé par l'intégrale définie :

$$k = \frac{1000}{2}\int_0^\alpha l^2 d\alpha.$$

L'élément dk de ce poids correspondant à la largeur dont l'inclinaison est donnée par un angle quelconque ε, sera égal à

$$dk = \frac{1000}{2} l^2 d\varepsilon.$$

Pendant le mouvement du bateau, la pression égale à ce poids élémentaire a travaillé depuis le moment où la ligne MN (qu'on peut appeler le rayon vecteur de dk) a coïncidé avec la flottaison, jusqu'au moment où celle-ci est venue en A_1B_1. Ce travail est le même que si, après avoir placé le rayon vecteur du poids dk sur A_1B_1, on le faisait tourner jusqu'à la position MN, et que dans chaque position intermédiaire la force restât perpendiculaire à A_1B_1. Lorsque, dans ce mouvement, le rayon vecteur forme avec A_1B_1 l'inclinaison quelconque $(\alpha - \varepsilon)$, la projection de la force sur la trajectoire parcourue par son point d'application, laquelle est normale au rayon vecteur, a pour valeur $dk \cos(\alpha - \varepsilon)$. Or si l'on considère le couple élémentaire des forces dk, dont

les points d'application sur le rayon vecteur sont espacés de $\frac{4}{3}l$, la somme des chemins parcourus par les points d'application des deux forces du couple sera $\frac{4}{3}ld\ (\alpha - \varepsilon)$, et par conséquent le travail élémentaire ou couple sera :

$$-\frac{4}{3}dkl\cos(\alpha - \varepsilon)d(\alpha - \varepsilon).$$

Le travail de ce couple dk, dans le mouvement de A_1B_1 à MN, sera :

$$-\frac{4}{3}dkl\int_0^{\alpha-\varepsilon}\cos(\alpha - \varepsilon)d(\alpha - \varepsilon) = -\frac{4}{3}dk \, . \, l\sin(\alpha - \varepsilon).$$

Pour tous les éléments dk compris entre le plan AB et un plan de flottaison quelconque A_1B_1, le travail total sera par conséquent :

$$-\int_0^{\alpha}dkl\sin(\alpha - \varepsilon) = -\frac{2}{3}1000\int_0^{\alpha}l^2\sin(\alpha - \varepsilon)d\varepsilon.$$

En développant sin $(\alpha - \varepsilon)$ et en considérant que, dans cette intégrale, α est une constante qui indique la limite de l'intégration, on a pour le travail total :

$$-\frac{2}{3}1000\left(\sin\alpha\int_0^{\alpha}l^3\cos\varepsilon d\varepsilon - \cos\alpha\int_0^{\alpha}l^3\sin\varepsilon d\varepsilon\right).$$

Maintenant, si nous cherchons les projections sur les lignes AB et OH de la distance qui sépare les centres de gravité des deux forces $\int_0^{\alpha}dk$ du couple des résultantes des pressions des secteurs AIA_1 et BIB_1, nous aurons évidemment les relations :

$$(14)\quad \begin{cases} km = \int_0^\alpha dk \times \frac{4}{3} l \cos\varepsilon = \frac{2}{3}\, 1000 \int_0^\alpha l^3 \cos\varepsilon d\varepsilon \\ kn = \int_0^\alpha dk \times \frac{4}{3} l \sin\varepsilon = \frac{2}{3}\, 1000 \int_0^\alpha l^3 \sin\varepsilon d\varepsilon. \end{cases}$$

Par ces relations on voit que le travail du couple des pressions k, correspondant à une inclinaison α du plan de flottaison, et pour une longueur ΔL, est donnée par l'expression indiquée plus haut :

$$-\Delta L k\,(m \sin\alpha - n\cos\alpha)$$

ou par :

$$-\Delta L\,.\,k\lambda.$$

De ces mêmes relations on déduit les deux égalités suivantes :

$$\frac{d\,(km)}{d\alpha}\sin\alpha - \frac{d\,(kn)}{d\alpha}\cos\alpha = 0$$

$$\frac{d\,(km)}{d\alpha}\cos\alpha + \frac{d\,(kn)}{d\alpha}\sin\alpha = \frac{2}{3}\,1000\,l^3.$$

m, n, et l ont ici les valeurs correspondant à α.

En vertu de la première de ces équations, on a :

$$\frac{d\,(k\lambda)}{d\alpha} = \frac{d}{d\alpha}\,(km \sin\alpha - kn\cos\alpha) = k\,(m\cos\alpha + n\sin\alpha).$$

Or le moment désigné par $\mathfrak{M}$, dans l'équation de l'équilibre statique, pour le bateau entier, étant égal, pour la longueur ΔL, à $k\left(n + \frac{m}{\text{tang}\,\alpha}\right)$, il s'ensuit qu'on a :

$$\frac{d\,(k\lambda)}{d\alpha} = \Delta\,(\mathfrak{M}_\alpha \sin\alpha),$$

en désignant le moment $\mathfrak{M}_\alpha$ $\sin\alpha$ pour l'élément de longueur, par $\Delta\,(\mathfrak{M}_\alpha \sin\alpha)$.

Donc le travail des pressions, pour l'inclinaison (α), est encore égal, pour le bateau entier, à :

$$\Sigma\Delta L . K\lambda = \int_0^\alpha \mathfrak{M}_\alpha \sin \alpha d\alpha,$$

et l'équation (13) peut être écrite ainsi :

$$(15) \quad \mathfrak{E} = (M + p\Delta h)(1 - \cos \alpha) + p\Delta d \sin \alpha - \int_0^\alpha \mathfrak{M}_\alpha \sin \alpha \, d\alpha.$$

En négligeant la résistance de l'eau au déplacement du bateau, bien qu'en réalité elle ne soit pas négligeable, on pourra égaler le double de ce travail à la quantité de force vive acquise par le bateau. (Je suppose qu'on appelle, comme il est d'usage de le faire, quantité de force vive, le produit MV^2 et non $\frac{1}{2}MV^2$, ce qui serait plus rationnel.) Si l'on désigne par φ_0 la quantité de force vive transmise au bateau par le choc du poids déplacé p (c'est-à-dire par la destruction brusque de la vitesse de ce poids au moment où il arrive dans son nouvel emplacement), le travail total des forces mises en jeu par le déplacement de ce poids, jusqu'à ce que le plan de flottaison prenne l'inclinaison α, sera exprimé par la fonction suivante :

$$(16) \quad \mathfrak{E}_\alpha = (M + p\Delta h)(1 - \cos \alpha) + p\Delta d \sin \alpha - \int_0^\alpha \mathfrak{M}_\alpha \sin \alpha d\alpha + \frac{1}{2}\varphi.$$

Si dans cette expression on substitue pour $(M + p\Delta h)$ la valeur déduite de l'équation d'équilibre statique et qui est égale à $\left(\mathfrak{M}^\theta - p\Delta d \frac{\cos \theta}{\sin \theta}\right)$, le travail correspondant à une inclinaison quelconque α, sera exprimé comme il suit :

$$\mathfrak{E}_\alpha = \mathfrak{M}_\theta (1 - \cos \alpha) - \int_0^\alpha \mathfrak{M}_\alpha \sin \alpha \, d\alpha +$$
$$+ p\Delta d \left(\sin \alpha - \frac{\cos \theta}{\sin \theta}(1 - \cos \alpha)\right) + \frac{1}{2}\varphi,$$

ou bien :

$$(17) \qquad \mathfrak{T}_\alpha = \mathfrak{M}_\theta(1-\cos\alpha) - \int_0^\alpha \mathfrak{M}_\alpha \sin\alpha\, d\alpha + \\ + \frac{d\Delta d}{\sin\theta}\Big(\cos(\alpha-\theta)-\cos\theta\Big) + \frac{1}{2}\varphi.$$

Si l'on détermine expérimentalement les moments de déversement que nous avons désignés par $(p\mathfrak{D})$ en fonction de α, on pourra remplacer dans l'équation précédente les moments $\mathfrak{M}$ par les valeurs correspondantes de $(\mathfrak{D}p)$. En effet, on a :

$$\mathfrak{M} = p\mathfrak{D} + (\mathrm{P}+\Pi)(z+y) = (p\mathfrak{D}) + \mathrm{M}.$$

La substitution de $(p\mathfrak{D})$ à $\mathfrak{M}$ introduira donc dans le premier terme du second membre $+\mathrm{M}(1-\cos\alpha)$ et dans le second terme $-\mathrm{M}(1-\cos\alpha)$, quantités qui se détruisent.

En égalant à zéro la différentielle du second membre de l'équation (16), on aura :

$$(\mathrm{M}+p\Delta h)\sin\alpha + p\Delta d\cos\alpha - \mathfrak{M}_\alpha \sin\alpha = 0.$$

Cette équation, divisée par sin α, est identique à celle qui donne l'inclinaison d'équilibre, ce qui est une vérification de l'exactitude de la relation (16), puisqu'on sait que le travail des forces, ou la quantité de forces vives devient un maximum lorsque le bateau passe par la position d'équilibre.

La quantité de force vive φ, transmise au bateau par le choc du poids p, peut être exprimée comme il suit :

Soient : v, la vitesse dont ce poids est animé au moment du choc, relativement au bateau dans la position inclinée qu'il a en cet instant ; q, la distance entre l'intersection du plan de flottaison initial (le bateau étant droit) avec le plan de flottaison au moment du choc, et la direction de la vitesse relative v. Je prends cette intersection pour axe de rotation en négligeant, dans l'évaluation des quantités de mouvement, celle relative à la translation de cet axe.

Les quantités de mouvement de rotation imprimées aux divers points du bateau sont telles, que l'intégrale de leurs moments, par rapport à l'axe de rotation, soit égale au moment de la quantité de mouvement du corps dont le poids est p, et dont la masse est $\frac{p}{g}$. En représentant par ω la vitesse angulaire correspondant à la quantité de mouvement de rotation imprimée au bateau, et en désignant par $\Sigma\delta m$ sa masse, et par $\Sigma\delta mr^2$ son moment d'inertie, par rapport à l'axe adopté, on a :

$$(\Sigma\delta mr^2)\,\omega = \frac{p}{g}\,v\,.\,q$$

et

$$\omega = \frac{p}{h}\cdot\frac{vq}{\Sigma\delta mr^2}.$$

La quantité de force vive pour cette vitesse angulaire est égale à :

$$\Sigma\delta mr^2\,\omega^2 = \varphi.$$

Donc on a :

$$\varphi = \frac{p^2}{g^2}\,\frac{v^2 q^2}{\Sigma\delta mr^2}.$$

La détermination exacte de la quantité φ serait à peu près impossible : non-seulement l'appréciation de la vitesse relative v ne peut qu'être très-incertaine, parce qu'elle exige une hypothèse sur la vitesse de rotation du bateau au moment du choc; mais encore le calcul du moment d'inertie du bateau $\Sigma\delta mr^2$ serait d'une complication extrême. Il faut donc se contenter nécessairement d'une grossière approximation pour l'évaluation de la quantité φ.

L'inclinaison extrême du bateau aura lieu lorsque le travail des forces sera nul. Cette inclinaison, étant désignée par η, sera donnée par l'équation :

$$(18)\quad (M+p\Delta h)\,(1-\cos\eta)+p\Delta d\sin\eta-\int_0^{\eta}\mathfrak{M}_\alpha\sin\alpha\,d\alpha+\frac{1}{2}\varphi=0.$$

En la mettant en regard de l'équation de l'équilibre statique :

$$(M + p\Delta h)\sin\theta + p\Delta d\cos\theta - \mathfrak{M}_\theta \sin\theta = 0$$

et en éliminant $(M + p\Delta h)$, on a :

$$(19)\qquad \frac{\int_0^\eta \mathfrak{M}_\alpha \sin\alpha d\alpha - p\Delta d \sin\eta - \frac{1}{2}\varphi}{1 - \cos\eta} = \frac{\mathfrak{M}_\theta \sin\theta - p\Delta d\cos\theta}{\sin\theta}$$

ou bien :

$$(20)\qquad \cos(\eta - \theta) - \cos\theta = \frac{\sin\theta}{p\Delta d}\left[\int_0^\eta \mathfrak{M}_\alpha \sin\alpha d\alpha - \right.$$
$$\left. - \mathfrak{M}_\theta (1 - \cos\eta) - \frac{1}{2}\varphi\right].$$

On voit ainsi que l'angle $(\eta - \theta)$ sera plus grand ou plus petit que θ, c'est-à-dire que l'angle η sera plus grand ou plus petit que 2θ, suivant que la quantité entre parenthèse dans le second membre, sera négative ou positive. Mais on se rend en même temps compte que l'angle η ne différera pas beaucoup du double de θ.

Rappelons encore que dans les équations (17), (18) et (19) on peut remplacer les moments $\mathfrak{M}$ par les moments de déversements correspondants $(p\mathfrak{D})$.

En négligeant le travail $\frac{1}{2}\varphi$ correspondant au choc des corps déplacés, on n'aura qu'à chercher le signe de la quantité

$$\left[\int_0^\eta \mathfrak{M}_\alpha \sin\alpha d\alpha - \mathfrak{M}_\theta (1 - \cos\eta)\right]$$

pour savoir si η est plus petit ou plus grand que 2θ. On voit qu'il faut non-seulement que le moment $\mathfrak{M}_\alpha$ (*dont la valeur dépend principalement des largeurs 2l à la flottaison*) croisse avec α, depuis o jusqu'à η, mais qu'il augmente plus vite entre θ et η qu'entre o et θ, pour que cette quantité soit positive et que η soit plus petit que 2θ. Si le moment

$\mathfrak{M}_\alpha$ augmentait de o à θ, mais qu'il restât ensuite constant, la quantité ci-dessus serait négative et égale à :

$$\left[\int_0^\theta \mathfrak{M}_\alpha \sin \alpha d\alpha - \mathfrak{M}_\theta (1 - \cos \theta\right].$$

L'angle η serait alors plus grand que $2\,\theta$.

Supposons par exemple que dans l'étendue de l'oscillation, la largeur $(2l)$ à la flottaison reste constante.

Dans ce cas on aura pour chaque section du bateau correspondant à la longueur ΔL :

$$km = \frac{2000}{3} l^3 \sin \alpha \qquad kn = \frac{2000}{3} l^3 (1 - \cos \alpha)$$

$$k\lambda \text{ ou } \int_0^\alpha \mathfrak{M} \sin \alpha d\alpha = km \sin \alpha - kn \cos \alpha = \frac{2000}{3} l^3 (1 - \cos \alpha),$$

$$\mathfrak{M} \sin \alpha = \frac{2000}{3} l^3 \sin \alpha \qquad \mathfrak{M} = \frac{2000}{3} l^3,$$

$$\int_0^\eta \mathfrak{M} \sin \alpha d\alpha = \frac{2000}{3} l^3 (1 - \cos \eta) = \mathfrak{M}_\theta (1 - \cos \eta).$$

Par conséquent on a :

$$\cos(\eta - \theta) - \cos \theta - 0$$

et

$$\eta = 2\theta.$$

Supposons, en second lieu, que les parois du bateau soient verticales. Dans ce cas, nous avons déjà trouvé pour le moment $\mathfrak{M}_\alpha$ et pour une longueur ΔL du bateau :

$$\mathfrak{M}_\alpha = \frac{1000}{3} l^3_0 (2 + \operatorname{tang}^2 \alpha) = \frac{1000}{3} l^3_0 \left(\frac{1}{\cos^2 \alpha} + 1\right).$$

D'où il résulte que

$$\int_0^\eta \mathfrak{M}_\alpha \sin \alpha d\alpha = \frac{1000}{3} \Sigma l^3_0 \left(\frac{1}{\cos \eta} - \cos \eta\right) =$$

$$= \frac{1000}{3} \Sigma l^3_0 \left(\frac{1 - \cos^2 \eta}{\cos \eta}\right)$$

et l'équation (19) devient :

$$\cos(\eta-\theta)-\cos\theta=\sin\theta\left[\frac{(1-\cos\eta)(1+\cos\eta)}{\cos\eta}-\left(\frac{1}{\cos^2\theta}+1\right)(1-\cos\eta)\right]\times\frac{1000\,\Sigma l^3{}_0\Delta L}{3p\Delta d},$$

ou bien :

$$\cos(\eta-\theta)-\cos\theta=\sin\theta\,(1-\cos\eta)\left[\frac{1}{\cos\eta}=\frac{1}{\cos^2\theta}\right]\times$$

$$\times\frac{1.000\,\Sigma l^3{}_0\Delta L}{3p\Delta d}.$$

Cette équation est satisfaite par une valeur de η plus petite que 2θ. Pour la résoudre par tâtonnement, il suffirait de connaître le moment d'inertie $\Sigma l^3{}_0\Delta L$ de la moitié de la section horizontale de flottaison.

Nous avons pris jusqu'ici pour plans coordonnés la section de flottaison lorsque le bateau est droit, et le plan normal à cette section et passant par son axe longitudinal. Les coordonnées des points d'application des forces ont été rapportées à ces plans, et les angles de rotation ont été mesurés à partir de la section de flottaison du bateau droit. L'application des formules que nous avons trouvées ne présente pas de difficultés ; mais elle suppose qu'on détermine le moment de déversement $(p\mathcal{E})$ pour toutes les inclinaisons, jusqu'à la limite qu'elles doivent atteindre. Cependant il est clair qu'à l'aide des dessins du bateau on pourrait obtenir les valeurs de ce moment au delà des inclinaisons observées dans les expériences.

L'inclination θ, correspondant à l'équilibre statique, étant déterminée, si l'on voulait se rendre compte, d'après la forme du bateau, si l'inclinaison maximum η qui pourra se produire dans le mouvement oscillatoire du bateau, sera plus petite ou plus grande que le double de θ, il suffira d'examiner comment, dans les diverses sections transversales

du bateau, les largeurs de flottaison varient de part et d'autre du plan de flottaison correspondant à l'angle θ.

Considérons en effet le bateau dans cette position d'équilibre, par suite des déplacements de poids qu'on a supposés (*fig.* 8).

Le nouveau centre de gravité P des poids sera sur la même verticale que le centre de gravité Q du volume d'eau déplacé.

Concevons maintenant qu'on relève le bateau de manière à le remettre droit et qu'ensuite on l'abandonne à lui-même; la ligne de flottaison tracée sur le bateau oscillera autour de celle BB_1, correspondant à la position d'équilibre. Dans ce mouvement il n'y aura à considérer que le travail de deux couples de forces : celui du couple des forces P égales au poids du bateau et appliquées aux points P et Q, celui du couple des poids variables des prismes que nous avons représentés par k. Si l'on désigne par y la distance PQ, le travail des poids sera égal à $-Py\,(1-\cos\alpha)$ pendant que la ligne de flottaison se déplacera de MM_1 à BB_1, et il sera égal à $+Py\,(1-\cos\alpha')$ pendant que la ligne de flottaison se déplacera de BB_1 à $M'M'_1$. Quant au travail des poids k, il est égal, d'après ce qu'on a vu plus haut, à $+\frac{2}{3}\,1000\int_0^{\alpha} l^3\sin(\alpha-\varepsilon)\,d\varepsilon$, pendant que la ligne de flottaison se déplacera de MM_1 à BB_1, et à $-\frac{2}{3}\,1000\int_0^{\alpha'} l^3\sin(\alpha'-\varepsilon)\,d\varepsilon$ pendant qu'elle se déplacera de BB_1 à $M'M'_1$.

En conséquence si, au moment initial du mouvement, la ligne de flottaison est AA_1 et que CC_1 soit celle correspondant à la limite d'inclinaison à laquelle le bateau s'arrêtera pour revenir en arrière, le travail accompli par toutes les forces dans le mouvement de AA_1 à CC_1 sera égal à :

$$-Py(1-\cos\theta)+Py(1-\cos\theta')+\frac{2}{3}1000\int_0^\theta l^3\sin(\theta-\varepsilon)d\varepsilon-$$
$$-\frac{2}{3}1000\int_0^{\theta'} l^3\sin(\theta'-\varepsilon')d\varepsilon,$$

ou bien :

$$Py(\cos\theta-\cos\theta')+\frac{2}{3}1000\left[\int_0^\theta l^3\sin(\theta-\varepsilon)d\varepsilon-\int_0^{\theta'} l^3\sin(\theta'-\varepsilon')d\varepsilon'\right]$$

Ce travail est positif depuis l'origine du mouvement jusqu'à l'inclinaison extrême θ' pour laquelle il est nul.

Si les largeurs de flottaison l sont symétriquement distribuées de part et d'autre de la flottaison d'équilibre BB_1, le travail est nul lorsque $\theta'=\theta$. Si entre BB_1 et CC_1 les largeurs varient de part et d'autre de BB_1, de manière que, pour la même limite (θ' et θ), l'intégrale $\int_0^{\theta'} l^3 \sin(\theta'-\varepsilon')$ soit plus grande que l'intégrale $\int_0^\theta l^3 \sin(\theta-\varepsilon)\, d\varepsilon$, le travail est négatif lorsque $\theta'=\theta$, et par conséquent il devient nul pour un angle θ' plus petit que θ. Enfin si, pour $\theta'=\theta$, l'intégrale $\int_0^{\theta'} l^3 \sin(\theta'-\varepsilon')\, d\varepsilon'$, était plus petite que l'intégrale $\int_0^\theta l^3 \sin(\theta-\varepsilon)\, d\varepsilon$, le travail serait nul pour un angle θ' plus grand que θ.

Des recherches qui précèdent, on serait tenté de conclure que même en négligeant les effets de la destruction brusque de la vitesse avec laquelle le poids p est déplacé, l'inclinaison maximum (η) que le bateau prendra par suite de ce déplacement, approchera généralement d'être égale au double de l'inclinaison correspondant à l'équilibre statique, et que, si le bateau est construit de manière que le moment de déversement ($p\mathfrak{D}$) n'augmente plus après cette inclinaison, l'angle η sera certainement plus que double de θ. Mais il faut se rappeler qu'on a négligé la résistance de l'eau au déplacement du bateau, et il n'est pas douteux que cette résistance a pour effet de diminuer considérablement l'in-

clinaison maximum. En effet, si cette résistance n'existait pas, le bateau, après qu'il aurait pris cette inclinaison η dans l'oscillation directe, reviendrait, dans l'oscillation inverse, jusqu'à sa position de départ, d'où il recommencerait à s'incliner par une seconde oscillation directe qui atteindrait encore la même valeur η, et le bateau continuerait ces oscillations identiques de part et d'autre de l'inclinaison d'équilibre θ, sans jamais s'y arrêter. Or ce n'est pas ce qui a lieu en réalité, et à moins que le bateau n'eût pour section un demi-cercle ayant son centre au niveau du plan de flottaison, ce mouvement de roulis s'arrête après un petit nombre d'oscillations. Cette décroissance rapide de l'amplitude des oscillations prouve donc que si un bateau abandonné à lui même doit s'incliner d'un angle θ pour arriver à sa position d'équilibre, il ne dépassera cette position que d'une fraction de l'angle $(\eta - \theta)$ qu'on trouverait en négligeant les résistances de l'eau. Supposons, par exemple, qu'au bout de quatre oscillations, le bateau ne s'incline plus que du quart de l'écart primitif (θ) de la position d'équilibre. On en déduirait par aperçu que, dans la première oscillation directe, l'inclinaison du bateau a dépassé la position d'équilibre d'environ $0,71\ (\eta - \theta)$; que dans l'oscillation le bateau s'est relevé au-dessus de cette position de $(0,71)^2\theta$; que dans la seconde oscillation directe l'écart a été de $(0,71)^3\ (\eta - \theta)$, et que dans l'oscillation inverse suivante, il a été de $(1,77)^4\theta = 0,25\ \theta$.

On arriverait donc à exagérer de beaucoup les inclinaisons maxima des bateaux en appliquant les formules trouvées ci-dessus, sans en corriger les résultats par des coefficients qu'il faudrait établir pour chaque bateau en observant, dans des oscillations d'expériences, les relations entre les inclinaisons maxima et celles d'équilibre.

Je terminerai cette note par l'application des formules de l'équilibre statique, aux expériences faites sur *la Mouche* n° 4, après sa reconstruction.

APPLICATION NUMÉRIQUE DES FORMULES DE L'ÉQUILIBRE STATIQUE.

La Mouche n° 4, après sa reconstruction, a été soumise aux expériences suivantes :

Le bateau a été chargé de 7.140 kilogrammes, savoir : 3.060 kilogrammes sur le pont et 4.080 kilogrammes dans les salles.

Le chargement a été réparti de manière que le bateau fût droit. En cet état, le pont était élevé à $1^m,04$ au-dessus du plan de flottaison, et le plancher des salles à $0^m,01$ en contre-bas du même plan.

L'enfoncement du bateau, sous ce poids de 7.140 kilogrammes, a été de $0^m,165$, ce qui donne $0^m,01$ d'enfoncement pour 430 kilogrammes de charge.

Le centre de gravité des 3.060 kilogrammes placés sur le pont était à $0^m,53$ au-dessus de ce pont, soit à $1^m,56$ au-dessus du plan de flottaison à charge. Celui du poids de 4.080 kilogrammes placé dans les salles était à $0^m,35$ au-dessus du plancher, soit à $0^m,34$ au-dessus du plan de flottaison.

Première observation. — Un poids de 510 kilogrammes, pris sur le pont, a été abaissé de ($\Delta h_1 = -0^m,25$) et a été déplacé dans le sens du pont de $\Delta d_1 = 1^m,61$.

L'inclinaison a été de $\tang \alpha_1 = 0,045$.

De ces données on déduit :

$$p_1 \mathfrak{D}_1 = \frac{510 \times (1,61 - 0,01035)}{0,045} = \frac{816}{0,045} = \ldots\ldots\ 18.133^{kgm}.$$

Deuxième observation. — Après ce premier déplacement un nouveau poids de 408 kilogrammes a été déplacé sur le pont, de manière que $\delta h_2 = +0^m,22$ et $\delta d_2 = 1^m,95$.

L'inclinaison observée a été de $\tang \alpha_2 = 0^m,08$. On a :

$$p_2 \Delta h_2 = (-510 \times 0{,}23 + 408 \times 0{,}22) = -27{,}54$$
$$p_2 \Delta d_2 = (\ \ 510 \times 1{,}61 + 408 \times 1{,}95) = 1616{,}60$$
$$p_2 Ⓓ_2 = \frac{-27{,}54 \times 0{,}08 + 1616{,}60}{0{,}08} = \frac{1615{,}40}{0{,}080} = 20{,}192^{\text{kxm}}$$

Troisième observation. — Un poids de 408 kilogrammes a été déplacé sur le pont de manière que $\delta h_3 = 0^{\text{m}},21$, $\delta d_3 = 1^{\text{m}},95$. En même temps un autre poids de 204 kilogrammes a été déplacé sur le pont, de manière que $\Delta h_3 = 0^{\text{m}},47$, $\Delta d_3 = 1^{\text{m}},95$. L'inclinaison a été tang $\alpha_3 = 0^{\text{m}},45$. On a :

$$p_3 \Delta h_3 = p_2 \Delta h_2 + 408 \times 0{,}21 + 204 \times 0{,}47 = 154^{\text{kxm}}$$
$$p_3 \Delta d_3 = p_2 \Delta d_2 \quad + \quad 612 \quad \times \quad 1{,}95 \quad = 2810$$
$$p_3 Ⓓ_3 = \frac{154 \times 0{,}145 + 2{,}810}{0{,}145} = \frac{2{,}831}{0{,}145} = 19{,}524^{\text{kxm}}$$

Quatrième observation. — Un poids de 510 kilogrammes a été déplacé dans les salles $\delta h_4 = 0^{\text{m}},33$, $\delta d_4 = 1^{\text{m}},05$, tang $\alpha_4 = 0^{\text{m}},192$.

$$p_4 \Delta h_4 = p_3 \Delta h_3 + 510 \times 0{,}35 = 332^{\text{kxm}},52$$
$$p_4 \Delta d_4 = p_3 \Delta d_3 + 510 \times 1{,}05 = 3345^{\text{kxm}},50$$
$$p_4 Ⓓ_4 = \frac{333 \times 0{,}192 + 3346}{0{,}192} = \frac{3{,}410}{0{,}192} = 17.760^{\text{kxm}}$$

Les résultats que nous venons d'obtenir montrent que le moment de déversement augmente entre les inclinaisons $0^{\text{m}},045$ et $0^{\text{m}},08$, mais que pour les inclinaisons plus fortes, ce moment va en décroissant. Cela tient à ce qu'on a établi sur les flancs du bateau des soufflages qui plongent seulement de quelques centimètres, lorsque le bateau est droit et à vide, et qui, avec le chargement de 7.140 kilogrammes, ont plongé d'environ $0^{\text{m}},20$. Il résulte de cette disposition qu'avec les inclinaisons de $0^{\text{m}},045$ et de $0^{\text{m}},08$, le soufflage relevé par le déversement du bateau était encore immergé, tandis qu'avec les inclinaisons de $0^{\text{m}},145$ et de $0^{\text{m}},192$, ce

même soufflage émergeait en entier, et que la ligne de flottaison se trouvait sur une paroi très-inclinée par rapport au plan principal du bateau. Ainsi la largeur de la section de flottaison diminue brusquemeut entre les inclinaisons $0^m,08$ et $0^m,145$, et dès lors le moment que j'ai désigné par $\mathfrak{M}$ dans l'équation d'équilibre (4) diminue, bien que l'inclinaison augmente, comme cela est facile à comprendre. La disposition que l'on a donnée aux soufflages *de la Mouche* n° 4, afin de diminuer la résistance en marche, est donc très-vicieuse au point de vue de la stabilité, puisque le moment de déversement, qui devrait augmenter au fur et à mesure qu'on approche de la limite d'inclinaison, va au contraire en diminuant.

On s'assure, par une construction graphique, que les nombres trouvés pour les moments de déversement sont concordants, et l'on en conclut que, pour l'inclinaison-limite, que je suppose égale à $0^m,20$, on a :

$$p_\theta \mathfrak{D}_\theta = 17{,}700^{kxm}.$$

Voyons maintenant combien on peut recevoir de voyageurs dans ce bateau.

Je suppose qu'on autorise 50 personnes sur le pont. Leur poids, à 70 kilogrammes, sera de 3.500 kilogrammes. Comme il existe au plus une quarantaine de places sur les bancs, il y aura au moins une dizaine de personnes qui seront debout. — J'admets qu'elles soient toutes debout, et que leur centre de gravité soit à $0^m,90$ au-dessus du pont, soit à $1^m,94$ au-dessus du plan de flottaison dans les expériences. Les voyageurs étant serrés les uns contre les autres, on donnera une valeur exagérée à leur déplacement moyen en l'estimant à $0^m,40$.

On aura ainsi :

$$\pi \mathfrak{D}'_\theta = \frac{3{,}500 \times 0{,}40}{0.20} = 7000^{kxm}.$$

Faisons maintenant une hypothèse sur le nombre de personnes à admettre dans les salles, et supposons que ce soit 40. Leur poids sera égal à 2.800 kilogrammes. Si elles sont toutes debout, leur centre de gravité sera à $0^m,90$ au-dessus du plancher, soit à $0^m,89$ au-dessus du plan de flottaison. Leur déplacement moyen maximum peut être évalué à $0^m,50$ et l'on aurait :

$$\pi''\text{Ⓓ}''_\theta = \frac{2,800 \times 0,50}{0,20} = 7000.$$

On aurait donc, pour le premier membre de l'équation (13), 14.000 kilogrammes.

Si la valeur attribuée à π'' est exacte, on devra trouver le même nombre pour le second membre.

Cherchons ce que devient ce second nombre.

Le montant du poids de 7.140 kilogrammes, qui était sur le bateau pendant les expériences, est :

$$\Pi\zeta = 3060^{kg} \times 1^m,56 + 4080^{kg} \times 0^m,34 = 6161^{kxm}.$$

Pour les poids des voyageurs, on a :

$$\Pi'\zeta' = 3500^{kg} \times 1^m,94 + 2800^{kg} \times 0^m,89 = 9282^{kxm}.$$

Différence. . . . . . . $-\ 3121^{kxm}$.

La différence $\Pi - \Pi'$ étant de 840 kilogrammes, le bateau se relèvera de $0^m,02$, de sorte que $(\Pi' - \Pi)\frac{1}{2\varepsilon} = +\ 8^k,60$, ce qui est à négliger. Il vient donc pour le second membre :

$$17,700^k - 3121^k = 14,579^{kxm}.$$

Ce nombre dépassant de 579^{kxm} celui trouvé pour le premier nombre, par suite de la valeur de 2.800 kilogrammes attribuée à π'', on s'assure, par un tâtonnement facile, que la vraie valeur de π'' est de 2.970 kilogrammes.

En conséquence, pour que le poids des voyageurs, étant censé subir sans vitesse le plus fort déplacement que comportent les dispositions du bateau, et en les supposant tous debout, l'inclinaison du bateau ne dépasse pas $0^m,20$, il faut qu'il y ait au plus cinquante personnes sur le pont et quarante-deux dans les salles.

En réalité, l'inclinaison maximum, pendant l'oscillation du bateau, serait beaucoup plus considérable, surtout si le mouvement se produisait brusquement. A la vérité nous avons exagéré les efforts du déplacement ou supposant tous les voyageurs debout, et leur poids moyen de 70 kilogrammes. Avec les bancs qui couvrent le pont, la plupart des passagers seront forcément assis et, s'il y avait cinquante personnes sur le pont, la moitié au moins ne pourrait pas se lever debout. Toutefois, il conviendra de n'admettre sur *la Mouche* n° 4, qu'un nombre de voyageurs moindre que celui déduit des formules de l'équilibre statique, avec l'inclinaison maximum de $0^m,20$.

Lyon, le 24 octobre 1864.

Note au sujet de la détermination du plus grand nombre de voyageurs qui peuvent être admis avec sécurité sur les bateaux omnibus.

Par M. JONCHIER, sous-ingénieur de la marine.

Considérons un corps flottant cylindrique dont la section ait une forme quelconque PLQ (*fig.* 9).

Soit PQ la flottaison lorsque le corps abandonné à lui-même est arrivé à sa position d'équilibre, G le centre de gravité du corps, C le centre de gravité de l'eau déplacée ou de la surface PLQ, point que nous appellerons centre de carène. Pour qu'il y ait équilibre, il est nécessaire que le point G et le point C soient sur une même verticale CGy.

Imaginons qu'on donne au corps flottant une inclinaison α, tout en lui conservant le même déplacement d'eau. La flottaison devient alors P'Q' et la direction de la pesanteur est GK perpendiculaire à P'Q'; le centre de gravité G ne change pas, mais le centre de carène se transporte en C'. La poussée du liquide n'est plus alors directement opposée au poids du corps, et celui-ci ne peut être maintenu dans la position supposée qu'autant qu'on lui appliquera des forces étrangères. Ces forces doivent former un couple pour que le déplacement ne soit pas influencé par leur action. Nous allons chercher la valeur du moment de ce couple que nous désignerons par la lettre M.

Nous prendrons pour origine des coordonnées le point C, et pour axe la ligne Cx, parallèle à la flottaison primitive PQ, et la ligne Cy, perpendiculaire à la première.

Abaissons du point G la perpendiculaire GH sur C'M, qui représente la poussée lorsque le corps est incliné de l'angle α. Soit δ la distance GH. Il est clair que le moment qu'il s'agit de déterminer a pour valeur le produit Pδ (P étant le poids du corps flottant).

Soient x_1 et y_1 les coordonnées du point C'. La ligne C'M qui passe par ce point, et qui fait avec l'axe des x un angle de $90° + \alpha$, a pour équation :

$$y = \text{tang}\,(90° + \alpha)\, x + y_1 - \text{tang}\,(90° + \alpha)\, x_1$$

ou

$$y = -\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\, x + y_1 + \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} x_1.$$

La distance δ du point G à cette droite est (en appelant a l'ordonnée CG du point G dont l'abcisse est nulle) :

$$\delta = \pm\,[(a - y_1)\sin\alpha - x_1\cos\alpha].$$

Par conséquent :

$$\text{(1)} \qquad M = P\delta = P\,[\,(a - y_1)\sin\alpha - x_1\cos\alpha\,].$$

Sous cette forme il est difficile de se faire une idée des variations de M, lorsque α reçoit des valeurs différentes. Il est plus commode, comme nous allons le voir, d'exprimer x_1 et y_1 en fonction de la largeur P'Q' de la flottaison.

Le corps étant dans la position où la flottaison est P'Q', donnons-lui une inclinaison différentielle supplémentaire $d\alpha$ telle que la flottaison devienne P''Q''. Les coordonnées du centre de carène qui étaient x_1 et y_1 deviendront x_1+dx_1 et y_1+dy_1. Si nous appelons S la surface de carène PLQ= P'LQ'=P''LQ'', les moments de P''LQ'' par rapport aux axes coordonnés, seront : S (x_1+dx_1) et S (y_1+dy_1).

On obtient une autre expression de ces moments de la manière suivante :

On a P''LQ''=P'LQ' + Q'IQ''— P'IP'' et le moment d'une somme étant égal à la somme des moments des parties, on a également S $(x_1+dx_1)=Sx_1+$ le moment de Q'IQ'' — le moment de P'IP''.

Or les deux triangles différentiels Q'IQ'' et P'IP'' sont égaux entre eux; ils ont pour surface $\frac{1}{2}l^2d\alpha$ (en appelant $2l$ la largeur P'Q' de la flottaison) et leur centre de gravité est à une distance du point I égale à $\frac{2}{3}l$; leurs moments, par rapport aux axes, peuvent être calculés facilement et l'on a finalement :

$$S(x_1+dx_1)=Sx_1+2\times\frac{1}{2}l^2\,d\alpha\times\frac{2}{3}l\cos\alpha$$

et

$$S(y_1+dy_1)=Sy_1+2\times\frac{1}{2}l^2\,d\alpha\times\frac{2}{3}l\sin\alpha,$$

ou en réduisant :

$$Sdx_1=\frac{2}{3}l^3\cos\alpha\,d\alpha,$$

$$Sdy_1=\frac{2}{3}l^3\sin\alpha\,d\alpha.$$

Pour simplifier les notations nous poserons $\frac{2}{3}\frac{l^3}{S}=\rho$, ce qui changera les deux relations ci-dessus en celles-ci :

$$(2) \qquad dx_1 = \rho \cos \alpha \, d\alpha,$$

$$(3) \qquad dy_1 = \rho \sin \alpha \, d\alpha.$$

Quand on pourra exprimer ρ en fonction de α et éliminer α entre (2) et (3), la relation qui résultera entre x_1 et y_1 sera l'équation de la courbe décrite par le centre de carène lors des inclinaisons successives du corps flottant.

Divisons (3) par (2), il vient :

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \text{tang}\ \alpha.$$

Donc la tangente à la courbe des centres de carène est parallèle à la flottaison, qui correspond au point que l'on considère.

Élevons au quarré (2) et (3) et ajoutons nombre à nombre, il vient :

$$\overline{dx}^2 + \overline{dy}^2 = \overline{\rho}^2\,\overline{d\alpha}^2$$

ou

$$d\sigma = \rho d\alpha,$$

si l'on appelle σ la longueur de l'arc de la courbe des centres de carène.

Donc ρ est le rayon de courbure de la courbe des centres de carène, au point x_1, y_1.

Le centre du cercle osculateur de la courbe des centres de carène est ce qu'on appelle *le métacentre.*

Il y a donc, en général, une infinité de métacentres; mais on réserve plus particulièrement cette désignation pour le centre de la courbure au point C, qui est le centre de carène pour la position initiale d'équilibre.

Dans le cas particulier où la courbe des centres de

carène est un cercle, tous les métacentres se confondent en un seul qui est le centre de ce cercle.

Revenons à l'équation (1) qui donne la valeur du couple produisant l'inclinaison α, savoir :

$$M = P\ [(a - y_1) \sin\alpha - x_1 \cos\alpha],$$

et substituons dans le deuxième nombre les valeurs de x_1 et de y_1 déduites de (2) et (3), nous aurons :

$$M = P\left[a \sin\alpha - \sin\alpha \int_0^\alpha \rho \sin\alpha d\alpha - \cos\alpha \int_0^\alpha \rho \cos\alpha d\alpha \right],$$

valeur que l'on peut mettre sous la forme suivante, en intégrant par parties et appelant ρ_0 la valeur de ρ qui correspond à $\alpha = 0$:

$$(4)\ M = P\left[(\rho_0 - a) \sin\alpha + \sin\alpha \int_0^\alpha \cos\alpha\, d\rho - \cos\alpha \int_0^\alpha \sin\alpha d\rho. \right]$$

Telle est l'expression complète du moment nécessaire pour produire une inclinaison finie α.

Si $d\rho = 0$, cette expression se réduit à :

$$(5) \qquad M = P\ (\rho - a) \sin\alpha.$$

C'est ce qui aura lieu lorsque ρ, et par conséquent la largeur $2l$ de la flottaison, aura une valeur constante quelle que soit l'inclinaison ou, ce qui est la même chose, lorsque les parois du corps flottant, dans les limites de l'inclinaison que l'on considère, feront partie du même cercle ayant son centre sur l'axe des y.

Les corps flottants pour lesquels on a dans la pratique à déterminer la valeur du moment M, tels que les bateaux, sont symétriques par rapport à l'axe des y. La largeur à la flottaison est un minimum ou un maximum lorsque $\alpha = 0$; on pourrait facilement le vérifier. Or on sait qu'une

fonction croît ou décroît très-lentement lorsque la valeur de la variable est peu différente de celle qui donne un minimum ou un maximum. On pourra donc adopter la valeur (5) du moment d'inclinaison pour un corps quelconque toutes les fois que α restera très-petit. Cela revient à substituer à la courbe des centres de carène son cercle osculateur au point C.

Il peut cependant être utile de déterminer une limite de l'erreur commise, surtout si α atteint une valeur qui ne puisse plus être considérée comme très-petite.

Supposons que la largeur de la flottaison croisse avec α dans la limite des inclinaisons que l'on considère; $d\rho$ sera alors positif. Soit ρ_1 la valeur de ρ correspondant à la plus grande valeur de α. On peut prouver que dans ce cas

$$\int_0^\alpha \cos \alpha d\rho \text{ est plus grand que } (\rho_1 - \rho_0) \cos \alpha$$
$$\text{et plus petit que } (\rho_1 - \rho_0)$$

et

$$\int_0^\alpha \sin \alpha d\rho \text{ est plus petit que } (\rho_1 - \rho_0) \sin \alpha$$
$$\text{et plus grand que } 0.$$

Si donc on remplace dans la valeur de M [équation (4)] le terme positif $\int_0^\alpha \cos \alpha d\rho$ par le terme plus petit $(\rho_1 - \rho_0)$ $\cos \alpha$, et le terme négatif $\int_0^\alpha \sin \alpha d\rho$ par le terme plus grand $(\rho_1 - \rho_0) \sin \alpha$ on aura :

$$M > P[(\rho_0 - a) \sin \alpha + (\rho_1 - \rho_0) \cos \alpha \sin \alpha (\rho_1 - \rho_0) \sin \alpha \cos \alpha]$$

ou :

$$M > P (\rho_0 - a) \sin \alpha.$$

Si, au contraire, on remplace dans (4) le terme positif $\int_0^\alpha \cos \alpha d\rho$ par le terme plus grand $\rho_1 - \rho_0$, et le terme néga-

tif $\int_0^\alpha$ sin $\alpha d\rho$ par le terme plus petit o, on aura :

$$M < P[(\rho_0 - a)\sin\alpha + (\rho_1 - \rho_0)\sin\alpha - 0]$$

ou :

$$M < P(\rho_1 - a)\sin\alpha.$$

On aura ainsi deux valeurs entre lesquelles sera compris le moment M, et l'on pourra apprécier si la formule approchée (5) présente une exactitude suffisante.

Lorsque $d\rho$ est négatif les limites, restent les mêmes ; elles sont seulement renversées, M est $< (\rho_0 - a)\sin\alpha$ et $> (\rho_1 - \alpha)$ sin α.

Quoi qu'il en soit de ces considérations, nous admettons, comme expression suffisamment exacte du moment M, la valeur

$$(5) \qquad M = P(\rho_0 - a)\sin\alpha.$$

P $(\rho_0 - a)$ est une constante qui changera avec chaque bateau. Lorsque l'on ne pourra pas la déterminer directement au moyen des données de celui-ci, on la déduira de l'expérience. On appliquera au bateau un couple M_1 de la valeur connue, et l'on observera l'inclinaison produite α_1. En substituant dans (5), on aura P $(\rho_0 - a)$.

Le moyen le plus simple d'appliquer au bateau un couple de grandeur connue, consiste à déplacer un poids p, quelconque, faisant partie du chargement.

Soit (*fig.* 10) un bateau dont la flottaison primitive PQ devient P'Q', lorsque l'inclinaison produite est égale à α.

Soit A la position initiale du poids p, B la position finale.

Imaginons qu'on applique au point A deux forces parallèles à p, égales et de sens contraire. L'équilibre ne sera pas troublé, et l'on peut considérer le groupe des trois forces (A, $-p$), (A, p), (B, p) comme formé :

1° D'une force p appliquée au point A et remplaçant le poids qui a été enlevé ;

2° D'un couple $(p, -p)$ dont le bras de levier est AK.

Donc, lorsqu'on change de position un poids placé sur un bateau, l'effet produit est le même que si, les poids restant en place, on appliquait au bateau un couple dont la force est p et le bras de levier AK.

Nommons d la différence AG des abcisses des points A et B, h la différence BG des ordonnées des mêmes points, on aura :

$$AK = AI + IK = d \cos \alpha + h \sin \alpha.$$

Par conséquent la valeur du moment du couple m, produit par le déplacement de p, est :

$$(6) \qquad m = p\,(d \cos \alpha + h \sin \alpha).$$

Nous avons supposé, dans tout ce qui précède, que le volume d'eau déplacé restait constant; supposons maintenant que l'on ajoute un poids ω au chargement, ce qui produira une immersion correspondante du bateau.

Soit (*fig.* 11) :

PQ la flottaison primitive,

P'Q' la flottaison lorsqu'on a ajouté le poids ω, de sorte que la tranche PQ, P'Q' est le déplacement correspondant au poids ω,

I le centre de gravité de cette tranche.

Ces flottaisons deviennent pq, $p'q'$ lorsque le bateau est incliné de l'angle α.

Nous savons que pour faire incliner un corps flottant il faut lui appliquer un couple dont les forces sont le poids et la poussée du liquide. Dans le cas qui nous occupe, le poids se décompose en deux parties, savoir : le poids P du bateau lége, et le poids ω dont le chargement a été augmenté; la poussée totale, de son côté, est la résultante de la poussée du volume pLq et de la poussée de la tranche pq, $p'q'$. Le couple total se décompose donc lui-même :

1° En un couple qui a pour forces le poids primitif du bateau et la poussée primitive ;

2° Et en un couple qui a pour forces le poids ajouté ω et la poussée de la tranche mn, $m'n'$.

Le premier de ces couples est celui dont nous avons calculé le moment $M = P\ (\rho - \alpha) \sin \alpha$.

Le deuxième a un moment dont la grandeur dépend de la situation du poids ω.

On peut imaginer que ω soit placé au point I. Alors le bras de levier du couple sera nul ; car le centre de poussée de pq, $p'q'$ s'éloignera très-peu de I, quelle que soit l'inclinaison, et restera même confondu avec lui si les parois $P'p$ et $Q'q$ sont parallèles.

De la résulte cette proposition :

Lorsqu'on ajoute un poids nouveau au chargement d'un bateau et que l'on place ce poids au point I, centre de gravité de la tranche dont le déplacement est augmenté, le couple nécessaire pour produire une inclinaison α ne change pas, ou du moins ne subit qu'une très-faible variation.

Nous avons à présent tous les éléments nécessaires pour résoudre le problème qui fait l'objet de cette note, et que nous énoncerons ainsi :

Déterminer le nombre de voyageurs qui, placés sur un bateau en un point déterminé et se déplaçant latéralement de la distance moyenne d, produiront une inclinaison α' fixée *à priori*.

Soit P le poids du bateau lége ; nous savons que pour le faire incliner de l'angle α, il faut lui appliquer un couple dont le moment est $M = P\ (\rho - a) \sin \alpha$. Imaginons qu'on place un poids p sur ce bateau dans une position telle que le centre de gravité p se confonde avec celui I de la tranche dont le déplacement a été augmenté. Transportons ce poids en un lieu quelconque, sur le pont, par exemple, à une hauteur h au-dessus du point I, et écartons-le latéralement de l'axe longitudinal à la distance d.

Le couple résultant de ce transport a pour moment :

$$(6) \qquad m = p\,(d \cos \alpha + h \sin \alpha).$$

Par conséquent,

$$(7) \qquad p\,(d \cos \alpha + h \sin \alpha) = \mathrm{P}\,(\rho - a) \sin \alpha.$$

L'angle α sera mesuré directement; c'est le résultat de l'expérience.

Faisons la même opération pour les voyageurs; soit p leur poids inconnu, h' la hauteur de leur centre de gravité au-dessus du point I' centre de poussée de la tranche d'immersion, d' la distance moyenne qu'ils peuvent parcourir transversalement.

Nous aurons :

$$(8) \qquad p'\,(d' \cos \alpha' + h' \sin a') = \mathrm{P}\,(\rho - a) \sin \alpha'.$$

Éliminant P $(\rho - a)$ entre (7) et (8), il vient :

$$(9) \quad p'\,(d' \cos \alpha' + h' \sin \alpha') \sin \alpha = p\,(d \cos \alpha + h \sin \alpha) \sin \alpha'.$$

Dans cette équation h' n'est pas connu, car il dépend de l'enfoncement ε du bateau sous la charge p' ; mais on pourra, avec une approximation suffisante, prendre pour sa valeur la distance du centre de gravité des voyageurs à la flottaison lége, sauf à la corriger ensuite si l'on trouvait que la quantité $\frac{1}{2}\,\varepsilon$, dont elle doit être diminuée, n'est pas négligeable.

L'équation (9) déterminera donc p' au moyen des données de l'expérience.

S'il y avait deux ponts recevant des voyageurs, et qu'on voulût ajouter à ceux-ci un chargement non susceptible de déplacement, on aurait, en raisonnant comme nous l'avons

fait pour établir l'équation (9) et en appelant p'' le poids des voyageurs à placer sur le deuxième pont, h'' leur hauteur au-dessus de la flottaison, d'' leur déplacement latéral, p''' le poids du chargement, h''' sa hauteur au-dessus de la flottaison :

$$(10)\quad [p'(d'\cos\alpha'+h'\sin\alpha')+p''(d''\cos\alpha'+h''\sin\alpha')+ \\ +p'''h'''\sin\alpha']\sin\alpha=p\,(d\cos\alpha+h\sin\alpha)\sin\alpha'.$$

On pourra choisir arbitrairement deux des trois inconnus p', p'', p''' ; l'équation déterminera la troisième.

Lorsque p' sera ainsi fixé, il faudra encore vérifier si la distance d', que peuvent parcourir les voyageurs, est compatible avec la disposition du pont, et dans le cas contraire on recommencera le calcul en adoptant pour d' une autre valeur.

La formule (5) $M=P\,(\rho-a)\sin\alpha$, qui a servi de point de départ aux calculs qui ont conduit à la relation (10), n'étant qu'approximative lorsque α cesse d'être très-petit, on pourrait conserver quelques doutes sur l'exactitude de cette dernière. Si l'on veut les faire disparaître, il faudra donner au bateau une inclinaison d'expérience α qui diffère peu de α'. Lorsque $\alpha=\alpha'$, la formule (10) devient rigoureusement exacte, attendu que les deuxièmes nombres des équations (7) et (8) sont identiques.

Enfin, si l'on craignait encore que le centre de poussée de la tranche $pqp'q'$ (*fig.* 11) s'écartât sensiblement de sa position initiale I, il faudrait charger le bateau d'un poids égal au poids p' déterminé par la formule (9), et faire une seconde expérience dont les données serviraient à obtenir une autre valeur plus approchée de p'.

Le problème que nous nous étions posé est ainsi résolu au point de vue statique ; l'angle α' ne pourra pas être dépassé d'une manière permanente, mais il n'en sera plus

de même lorsque les forces vives de la masse entreront en jeu sous l'action d'un brusque déplacement des voyageurs. Sans chercher à résoudre la question dans toute sa généralité, nous allons déterminer la valeur maximum de l'inclinaison α, ou la limite de l'oscillation dans le cas particulier où les voyageurs passeraient instantanément d'une position à l'autre.

Nous conserverons les notations précédentes. Les voyageurs, en se déplaçant de la quantité d, donneront naissance à un couple moteur dont le moment est $m = pd \cos \alpha$. L'inclinaison du bateau fait naître de son côte un couple résistant dont le moment a pour valeur approchée $M = P(\rho - a) \sin \alpha$. Le bateau, lorsqu'il est incliné de α, est donc sollicité par le moment

$$N = pd \cos \alpha - P(\rho - a) \sin \alpha.$$

N est nul lorsque α atteint la valeur α' limite des inclinaisons statiques, et par conséquent $pd \cos \alpha' = P(\rho - a) \sin \alpha'$, d'où en substituant $P(\rho - a)$ dans l'équation ci-dessus :

$$(11) \quad N = pd \cos \alpha - \frac{pd \cos \alpha' \sin \alpha}{\sin \alpha'} = \frac{pd}{\sin \alpha'} (\cos \alpha \sin \alpha' - \sin \alpha \cos \alpha').$$

L'élément de travail transmis au bateau pendant la rotation $d\alpha$ est :

$$N d\alpha = \frac{pd}{\sin \alpha'} (\sin \alpha' \cos \alpha d\alpha - \cos \alpha' \sin \alpha d\alpha).$$

Si l'on ne tient pas compte du changement de l'axe de rotation qui, en effet, est très-petit, on pourra intégrer cette expression pour avoir le travail total T transmis au corps lorsqu'il atteint l'inclinaison α; on trouve ainsi :

$$T = \frac{pd}{\sin\alpha'}\int_0^{\alpha}(\cos\alpha \sin\alpha' - \sin\alpha\cos\alpha')\,d\alpha,$$

$$T = \frac{pd}{\sin\alpha'}(\sin\alpha\sin\alpha' + \cos\alpha\cos\alpha') + C.$$

Lorsque $\alpha = 0$, on a $T = 0$, par conséquent $C = -\frac{pd\cos\alpha'}{\sin\alpha'}$, et substituant cette valeur dans T

$$T = \frac{pd}{\sin\alpha'}(\sin\alpha\sin\alpha' + \cos\alpha\cos\alpha' - \cos\alpha',$$

et enfin :

$$(12) \qquad T = \frac{pd}{\sin\alpha'}\left[\cos(\alpha - \alpha') - \cos\alpha'\right].$$

T, qui est nul à l'origine du mouvement, devient de nouveau égal à zéro lorsque $\cos(\alpha - \alpha') = \cos\alpha'$, ou lorsque α est égal à $2\alpha'$.

Or, au moment où le travail devient nul, le mouvement s'arrête; la limite de l'oscillation du corps sera donc $\alpha = 2\alpha'$.

Sans doute la supposition d'un déplacement instantané des voyageurs n'est pas admissible, et l'on ne peut pas négliger la résistance de l'eau, ainsi que nous l'avons fait; mais il n'en est pas moins vrai que pour fixer l'inclinaison-limite, qui sera regardée comme dangereuse, il faudra tenir compte de cette circonstance que le bateau, une fois en mouvement, dépassera considérablement la position d'équilibre.

Dans les expériences qui ont été faites jusqu'à présent, on a admis 0.20 pour l'inclinaison-limite. En réalité cette inclinaison serait dépassée de beaucoup et atteindrait probablement la valeur de 0.30 ou 0.40. Les voyageurs seraient jetés les uns sur les autres et les garde-fous seuls pourraient empêcher qu'ils ne tombassent à la rivière.

On devra donc vérifier si ceux-ci peuvent résister à la

charge qu'ils auront à supporter; mais comme il pourrait résulter des accidents individuels de la chute des voyageurs, il sera prudent de diminuer la limite de l'inclinaison statique. Je pense qu'elle ne devrait pas être plus grande que 0.15.

Lyon, le 21 octobre 1864.

N° 150

NOTE

Sur les travaux de construction du grand viaduc de Morlaix.

Par M. FÉNOUX, ingénieur des ponts et chaussées.

1° DESCRIPTION GÉNÉRALE.

Position de l'ouvrage. — Le chemin de fer de Rennes à Brest traverse, immédiatement en amont de la gare de Morlaix, la vallée au fond de laquelle cette ville est bâtie. En raison de la hauteur du col par lequel la ligne franchit le faîte séparatif des bassins du Douron et du Jarlot, d'une part, et de l'altitude du plateau sur lequel elle se développe entre Morlaix et Pleyber-Christ, d'autre part, le passage de la vallée de Morlaix se fait à une hauteur de $62^{m}.16$ au-dessus du fond du cours d'eau qui y coule, et à $56^{m}.74$ au-dessus des quais du port. La hauteur totale du viaduc, depuis le rocher qui a reçu les fondations jusqu'au sommet du parapet, se trouve ainsi de $63^{m}.26$.

Forme générale. — Dans ces conditions de hauteur, il était à peu près indispensable de relier les piles par des arceaux d'arc-boutement ayant pour but d'empêcher toute flexion, et donnant à ces piles une solidarité plus grande que celle résultant uniquement des arches destinées à supporter la voie. Le viaduc de Morlaix (Pl. 135 et 136) a donc été construit avec deux étages de voûtes, conformément au type adopté pour les grands viaducs de ce genre exécutés sur le chemin de fer de Lyon. Ce type, en raison de la forme simpli-

liée des supports, de leur masse, de leurs fruits gradués, de leurs grands empâtements, présente des avantages sérieux, tant au point de vue de la facilité de construction, qu'au point de vue de la répartition des pressions et de l'effet d'étaiement produit contre les actions latérales. La longueur totale de l'ouvrage, mesurée au parapet, est de 292^m.02.

Ouverture des arches. — L'étage supérieur présente quatorze arches en plein-cintre de 15^m.50 d'ouverture (Pl. 135, *fig.* 1); l'étage inférieur est formé de neuf arches, également en plein-cintre, dont l'ouverture est de 13^m.47. Dans la détermination de ces ouvertures, les circonstances locales ont pris une importance considérable, et ont pesé dans la balance, on doit le dire, d'un poids presque égal à celui des considérations purement rationnelles ou techniques. Construit au-dessus de la ville même, et en tête du bassin à flot de Morlaix, le viaduc devait permettre de conserver leur largeur aux quais bordant ce bassin; il devait se présenter dans des conditions de symétrie aussi satisfaisantes que possible, par rapport à leurs arêtes; il avait, enfin, à traverser une rue et une ruelle auxquelles il devait donner passage. Les ouvertures indiquées ci-dessus, ont permis, avec les épaisseurs de piles et les fruits adoptés, de laisser sur chaque quai une largeur libre de 12 mètres, de placer les faces des piles sensiblement dans l'alignement des arêtes de ces quais et de conserver passage à la rue et à la ruelle traversées. D'ailleurs, ces ouvertures se prêtaient à des dispositions de cintre assez simples et n'exigeaient, pour les matériaux, que des dimensions faciles à obtenir.

Rapport entre la hauteur des deux étages. — Le rapport admis entre la hauteur de l'étage inférieur et celle de l'étage supérieur, aux points où cette hauteur atteint son entier développement, est celui de trois à cinq. Ces proportions donnent à l'étage inférieur un grand caractère de solidité et de vigueur, et en font comme le soubassement monumental de la construction.

Épaisseurs des piles aux naissances.—Les épaisseurs des piles, aux naissances, pour des arches de l'ouverture adoptée à l'étage supérieur du viaduc de Morlaix, varient considérablement dans les ouvrages existants : on les trouve de 2^{m}.70 au viaduc de Barentin et de 5 mètres au viaduc de Gartempe. On a donné aux piles du viaduc de Morlaix, une épaisseur de 4^{m}.25 aux naissances. Cette dimension, sans être exagérée, reste néanmoins beaucoup au-dessus de l'épaisseur strictement nécessaire au point de vue des pressions; mais dans des ouvrages de cette nature, une légèreté excessive choque l'œil autant que la raison; des proportions un peu mâles et évidemment rassurantes donnent seules, à la construction, le caractère monumental qui lui convient. L'épaisseur aux naissances a été portée à 5^{m}.50 pour les piles extrêmes formant culées : on a annexé à ces culées de petits murs en retour, de 3 mètres de longueur, dont l'effet est de terminer l'ouvrage d'une façon plus satisfaisante. En outre, trois des piles intermédiaires ont été renforcées, de façon à interrompre les trépidations qui pourraient se propager longitudinalement dans le viaduc : ces trois piles maîtresses ont, aux naissances, une épaisseur de 5 mètres.

Forme des piles. Fruits.—On s'est attaché à donner aux supports la forme la plus simple possible, et à y faire varier la section d'une manière continue, en évitant tout ressaut brusque, tout changement non progressif dans les dimensions. Il est évident que l'on arrive ainsi à une transmission des pressions, beaucoup plus convenable et plus assurée qu'avec des variations soudaines de sections, comme celles que l'on voit dans un grand nombre de viaducs, où les piles sont composées d'une série de massifs avec empâtement successif de l'un sur l'autre, sans liaison bien certaine entre eux. Les fruits des supports sont différents aux deux étages et dans les deux sens (Pl. 135, *fig.* 1 et 2); le fruit du parement intérieur est de 0^{m}.025 par mètre, à l'étage du haut et de 0^{m}.045 par mètre à l'étage du bas; pour les fruits de

tête, on a adopté 0^{m}.08 par mètre à l'étage supérieur et 0^{m}.10 à l'autre.

Les piles reposent sur des socles dont les parements sont verticaux et dont la hauteur, variant d'ailleurs avec les ondulations du terrain, atteint 3^{m}.10 aux piles où ils ont le plus grand développement. Au-dessus du couronnement des voûtes du bas, les piles sont percées, suivant la direction de l'axe du chemin de fer, de portes en plein-cintre de 2 mètres d'ouverture et de 2^{m}.75 de hauteur sous clef, établissant la continuité de la circulation sur la plate-forme de l'étage inférieur, et facilitant ainsi le service de visite et d'entretien du viaduc.

2° DÉTAIL DES DIVERSES PARTIES DE L'OUVRAGE.

Toutes les piles du viaduc de Morlaix ont été établies directement sur le rocher, formé par un schiste bleu bien résistant. Pour trouver ce terrain solide, on a dû, à certaines piles, descendre à plus de 9 mètres au-dessous du sol naturel : la hauteur moyenne des massifs de fondations a été de 5^{m}.80. Sur l'emplacement des piles à flanc de coteau, celles de la rive droite surtout, le rocher se présentait avec une inclinaison assez grande et on a dû le déraser par larges redents horizontaux, dont l'exécution a conduit, en quelques points, à pousser les fouilles à plus de 6 mètres de profondeur dans le rocher. Ces redents ont été remplis avec de la maçonnerie, exécutée au mortier de ciment, et conduite de façon à donner, au niveau des parties les plus élevées des fouilles, un plan parfaitement horizontal, sur lequel on a établi le massif de fondations construit en maçonnerie avec mortier de chaux hydraulique. Ces massifs ont été élevés verticalement, et offrent, au niveau du sol, dans tous les sens, un empâtement de 0^{m}.40 par rapport à la base inférieure des supports. Pour les quatre piles situées le long des quais, on a monté les maçonneries des massifs de fondations avec mortier de ciment

sur le premier mètre d'élévation à partir du rocher : au-dessus de cette hauteur, on s'est borné à entourer la maçonnerie avec mortier de chaux hydraulique, d'une enveloppe de $0^m.30$ d'épaisseur, exécutée avec mortier de ciment. Autour des fondations de toutes les piles, on a établi soit des barbacanes, soit des drains à pierre sèche, destinés à assurer aux eaux un facile et prompt écoulement.

Nature des parements. — L'emploi de la pierre de taille a été restreint aux encadrements de l'ouvrage, pierres d'angles, bandeaux, cordons, plinthes et bahuts; le surplus des parements vus est exécuté en moellons piqués. La hauteur d'assise des pierres de taille formant angles des piles, de même que la hauteur d'assise des moellons, va en diminuant, de la base au sommet des supports. Cette hauteur varie de $0^m.60$ à $0^m.40$ pour la pierre de taille et de $0^m.30$ à $0^m.20$ pour le moellon piqué. Le minimum de queue des moellons a toujours été égal à 1 fois et demie leur hauteur.

Maçonnerie d'intérieur. — Les maçonneries d'intérieur ont été entièrement exécutées avec moellons bruts. sans aucune interposition d'assises de libages. Les limites dans lesquelles les pressions restent renfermées ont permis d'en agir ainsi. Dans certains ouvrages de ce genre, tels que les grands viaducs du chemin de fer de Limoges et le viaduc de Dinan, on a cru devoir, pour mieux résister à l'écrasement, s'astreindre à exécuter toutes les maçonneries d'intérieur avec des moellons, à lits parallèles, régulièrement taillés et de hauteur égale à celle des moellons de parement. Ces dispositions sont certainement plus avantageuses au point de vue de la résistance aux pressions verticales. Mais, dans ces sortes d'ouvrages, la réduction des pressions aux limites admissibles, n'est qu'une condition assez secondaire, en ce sens qu'elle est, en général, très-facile à réaliser. Ce qu'il importe surtout d'y considérer, ce sont les vibrations produites aux passages des trains; il

ne suffit pas que les matériaux ne s'écrasent pas sous les pressions pour assurer la bonne conservation de l'ouvrage : si l'on ne s'est pas mis à l'abri de l'influence des vibrations, elles produiront à la longue dans les maçonneries des effets de dislocation redoutables, et dont on pourrait citer de nombreux exemples. Or, pour éviter ces effets, on est conduit à augmenter la masse relative de l'ouvrage, et par suite, à donner toujours aux supports des dimensions de beaucoup supérieures à celles strictement nécessaires pour les garantir contre l'écrasement.

Voûtes, tympans, couronnements. —Les voûtes de l'étage inférieur (Pl. 135, *fig.* 3 et 6) dont l'ouverture est de $13^m.47$ ont, à la clef, une épaisseur de $0^m.90$; elles sont extradossées suivant un arc de cercle de $9^m.80$ de rayon ; jusqu'à la hauteur de $4^m.70$ au-dessus des naissances, elles se perdent dans la maçonnerie des supports. A cette hauteur, les voûtes ont $1^m.65$ d'épaisseur ; les murs des tympans établis au-dessus des voûtes ont $1^m.50$ d'épaisseur sous la plinthe et vont en augmentant suivant un fruit de 15 p. 100. Les claveaux de tête ont $0^m.80$ de hauteur, $0^m.41$ de largeur en moyenne et, alternativement, $0^m.50$ et $0^m.70$ en douelle. La distance entre les têtes est de 10 mètres ; la partie de la douelle, comprise entre les bandeaux de tête, est formée de moellons piqués, de $0^m.60$ de queue moyenne ; la surépaisseur de la voûte a été exécutée avec des moellons bruts disposés en prolongement des plans de joints des voussoirs de douelle. Les murs de tympans sont surmontés d'une plinthe en pierres de taille, ayant $0^m.70$ de hauteur. L'espace compris entre les tympans, l'extrados et les maçonneries des supports, a été rempli par de la maçonnerie de moellons bruts, exécutée avec mortier à 4 de sable pour 1 de chaux hydraulique. Ces maçonneries et celles des tympans sont recouvertes d'un pavage partant de la plinthe et formant cuvette au centre de la voûte, où les eaux s'écoulent par une gargouille en fonte. Le pavage est posé avec

mortier hydraulique et rejointoyé au ciment de Portland.

Les voûtes supérieures, dont l'ouverture est de 15^{m}.50 (Pl. 135, *fig.* 4, 5 et 7), ont 1 mètre d'épaisseur à la clef; l'extrados, formé par un arc de cercle de 10^{m}.90 de rayon, commence à se détacher des supports à 5^{m}.52 au-dessus du niveau des naissances; les voûtes, en ce point, ont une épaisseur de 1^{m}.75. Les claveaux de tête ont 0^{m}.90 de hauteur, 0^{m}.42 de largeur moyenne, et, alternativement, 0^{m}.50 et 0^{m}.70 de retour en douelle. Les moellons piqués, formant la douelle, entre les bandeaux de tête, ont une queue moyenne de 0^{m}.60; la surépaisseur des voûtes est formée par de la maçonnerie des moellons bruts, disposés en prolongement des rayons de l'extrados. Toutefois, à la clef et aux contre-clefs, toute l'épaisseur de la voûte est exécutée en moellons taillés. En outre, les pierres formant les assises de contre-clefs sont reliées l'une à l'autre, entre les 2 têtes, par des crampons en fer de 0^{m}.03 d'équarrissage : cette disposition a pour but de prévenir toute chance d'écartement des têtes. Dans le même but, on a placé dans l'axe de chaque pile, au droit des clefs de voûtes, un tirant en fer du Berry, de 0^{m}.05 d'équarrissage, portant à ses deux extrémités des ancres en forme de croix de Saint-André, de 0^{m}.50 de branches, noyées dans les maçonneries derrière les moellons de parement. Toute la partie comprise entre l'extrados et la couche de sable placée sous le ballast, est exécutée en maçonnerie ordinaire, semblable à celle du reste de l'ouvrage. Cette maçonnerie (*fig.* 8) est recouverte d'une chape en mortier de 0^{m}.05 d'épaisseur et d'un enduit en asphalte d'une épaisseur de 0^{m}.012. L'enduit s'étend jusque sous la plinthe; il est réglé de façon à former cuvette vers le centre de chaque voûte; la pente en long y est de 0^{m}.03 par mètre; la pente en travers va en augmentant du milieu de la pile, où elle est de 0^{m}.05 par mètre, juqu'au milieu de la voûte, où elle est de 0^{m}.15 par mètre. Les eaux qui coulent sur l'enduit et qui sont ainsi conduites au centre de la voûte, s'en échap-

pent par une gargouille en fonte scellée dans la maçonnerie. Entre la chape et le ballast, on a répandu une couche de sable destinée à atténuer les vibrations au passage des trains. Cette couche a une épaisseur de 0m.50 au-dessus du centre des piles, et de 0m.73 au-dessus du centre des voûtes.

L'ouvrage est couronné par une plinthe de 0m.90 de queue et de 0m.40 de hauteur, surmontée d'un parapet plein en pierres de taille, de 1m.20 de hauteur. Au-dessus de chaque support, dans les parties correspondant aux baies d'évitement, la plinthe est soutenue sur de grandes consoles de 1m.40 de hauteur. Ces consoles, sur chaque tête, sont au nombre de 4 par pile ordinaire, de 5 par pile maîtresse et de 8 par culée.

La largeur libre entre les faces intérieures des parapets est de 8 mètres. Ces parapets sont en porte à faux de 0m.05 sur le parement du moellon piqué.

Pressions aux divers points. — Dans ces conditions, les pressions par centimètre carré, aux diverses sections des piles, sont les suivantes :

	PILE ORDINAIRE.	PILE MAÎTRESSE.
	kilogrammes.	kilogrammes.
Aux naissances supérieures	4.35	4.01
Au niveau du premier étage	6.87	6.82
Aux socles inférieurs	7.50	7.71
A la base des fondations	8.12	8.24

3° NATURE DES MATÉRIAUX EMPLOYÉS.

La pierre de taille et le moellon piqué, employés au viaduc de Morlaix, proviennent, pour la plus grande partie, des carrières de l'*Ile grande*, situées à 40 kilomètres de l'ouvrage. Ces matériaux étaient transportés par bateaux :

toutefois, pour assurer le service d'hiver et suppléer à l'insuffisance des approvisionnements par voie de mer, à l'époque des gros temps, on avait aussi ouvert dans les terres, à 15 kilomètres de Morlaix, des carrières qui ont fourni une certaine quantité de pierres de taille et de moellons piqués au viaduc. La pierre employée est un granit rosé, à grains serrés et fins, se taillant bien et gardant la ciselure. La taille a été faite à la fine pointe, entre ciselure de $0^m.025$: dans les pierres d'angles et les bandeaux de voûtes, les arêtes de la pierre de taille ont été abattues en chanfreins à 45° sur $0^m.025$ de hauteur, de façon à former refends aux joints.

Moellons bruts. — Jusqu'au-dessus des petites voûtes transversales, régnant à la hauteur du couronnement de l'étage inférieur, on n'a employé, comme moellons de blocage, que des matériaux granitiques provenant des îles situées à l'ouvert de la rade de Morlaix, à 15 kilomètres du viaduc. Au-dessus de ce niveau jusqu'à la naissance des voûtes supérieures, on a mélangé à ces granits des schistes très-durs, provenant du coteau sur lequel s'appuie le viaduc, du côté de Brest. A partir des naissances des voûtes supérieures, ce schiste a été exclusivement employé dans les maçonneries de blocage.

Chaux et sable. —Au début des travaux, on a fait usage, dans les maçonneries du viaduc, de chaux hydrauliques de diverses provenances, chaux de Doué, chaux de Paviers, chaux d'Échoisy. Ces chaux arrivaient à Morlaix par mer, éteintes et en poudre. Mais les difficultés d'approvisionnements et les avaries nombreuses qui se produisirent dans ces arrivages, dès le commencement des travaux, engagèrent à fabriquer la chaux sur place, en faisant venir des moellons calcaires, dont la mise en dépôt était très-facile et que l'on cuisait au fur et à mesure des besoins. Les pierres employées ont été celles des environs de Marans (Charente-Inférieure). Ces calcaires qui appartiennent à la couche

moyenne du terrain jurassique, donnent des chaux hydrauliques d'excellente qualité, sous la condition que la pierre soit convenablement choisie. La plupart des carrières de Marans, en effet, jusqu'à 4 ou 5 mètres de profondeur, ne fournissent que des pierres blanchâtres contenant fort peu d'argile et donnant à la cuisson des produits très-peu hydrauliques. Au-dessous de cette profondeur, on trouve une pierre, très-constante d'aspect, caractérisée par une couleur gris clair, avec marbrures bleues, laquelle contient de 15 à 20 p. 100 d'argile, et donne des chaux dont les hydrates supportent l'aiguille Vicat au bout de vingt-quatre heures. C'est cette pierre qui a été exclusivement employée à la cuisson des chaux mises en œuvre au viaduc; sa couleur et son aspect très-caractéristiques rendaient très-facile la surveillance établie aux fours pour empêcher la cuisson des calcaires de qualité inférieure. La chaux était éteinte par aspersion et blutée aux fours.

Le sable, mélangé à cette chaux, pour fabriquer les mortiers, provenait des grèves de la rade de Morlaix, lesquelles fournissent un sable siliceux très-pur, d'excellente qualité.

4° DISPOSITION DES CHANTIERS. — ÉCHAFAUDAGE DE SERVICE.

Pont de service.—Les dispositions prises, pour approcher les matériaux, et pour les faire arriver sur le pont de service, ont varié suivant la hauteur des maçonneries au-dessus du niveau des quais. A ce point de vue, la construction du viaduc peut être considérée comme ayant été divisée en trois phases, sur le détail desquelles on reviendra plus loin. Mais depuis le commencement jusqu'à l'achèvement des travaux, la distribution s'est faite dans des conditions identiques, à l'aide du pont de service et des apparaux que l'on va décrire.

Le pont de service (Pl. 136, *fig.* 1, 8 et 9) consistait en

une passerelle en bois, reliant toutes les piles et s'élevant avec elles. Les niveaux des fondations des piles étant très-différents, la longueur du pont de service a dû aller en augmentant au fur et à mesure que, l'ouvrage montant, le nombre des piles en chantier est devenu plus considérable. Au moment de son plus grand développement, la passerelle avait une longueur totale de 300 mètres, se composant de quatorze travées complètes, et de deux parties formant raccordement des travées extrêmes avec les remblais aux abords, toutes ces travées étant d'ailleurs solidaires, et reliées entre elles comme on le dira tout à l'heure.

Le pont se composait de deux fermes à croisillons, ayant chacune $2^{m},55$ de hauteur, surmontées d'un garde-corps de 1 mètre et supportant deux planchers, l'un correspondant à la partie supérieure des fermes et portant les voies de service, l'autre à la partie inférieure, servant à la surveillance, à la circulation des ouvriers, au transport de l'eau d'arrosage et à la distribution du mortier.

Chaque ferme était formée de deux longrines de $0^{m}.20$ sur $0^{m}.25$ d'équarrissage, reliées par de grands tire-fonds en fer ayant $2^{m}.70$ de hauteur, $0^{m},03$ de diamètre et présentant un espacement de $1^{m},80$ d'axe en axe. Entre deux tire-fonds consécutifs, la longrine inférieure et la longrine supérieure étaient, en outre, réunies par une croix de Saint-André, dont l'un des croisillons était formé d'une pièce de bois de $0^{m}.12$ sur $0^{m}.10$ d'équarrissage, et dont l'autre, composé de deux pièces semblables à la précédente, faisait moise double par rapport à cette dernière avec laquelle il s'assemblait à l'aide d'un boulon en fer de $0^{m},02$ de diamètre, traversant les trois pièces.

Les fermes, ainsi composées, étaient placées à une distance intérieure de 3 mètres l'une de l'autre, elles étaient reliées verticalement au droit de chaque tire-fond, par une charpente transversale composée comme suit :

1° Deux traverses horizontales de $0^{m}.20$ sur $0^{m}.20$ d'é-

quarrissage, ayant de longueur $4^{m}.20$ pour la traverse du bas et $4^{m}.80$ pour l'autre, l'une de ces traverses reposant sur la longrine inférieure, l'autre placée sur la longrine supérieure, les deux traversées par le tire-fonds reliant les deux longrines.

2° A chaque extrémité de ces traverses, et de chaque côté du tire-fonds, deux séries de doubles moises, de $0^{m}.09$ sur $0^{m}.09$ d'équarrissage, boulonnées aux deux traverses, les unes inclinées vers l'extérieur et portant le garde-corps, les autres inclinées vers l'intérieur, et formant jambes de force.

Ces charpentes transversales, placées dans des plans verticaux espacés de $1^{m}.80$ d'axe en axe, étaient contreventées horizontalement en haut et en bas, par des pièces obliques, s'embrèvant sur deux traverses horizontales successives. l'obliquité de la pièce de contreventement du haut étant inverse de celle de la pièce de contreventement du bas.

Les planchers étaient formés de madriers jointifs de $0^{m}.08$ d'épaisseur. Le plancher supérieur portait d'ailleurs deux voies de fer, pour les trucs et wagons de service : il portait, en outre, en dehors de ces voies et sur des pièces longitudinales de $0^{m}.20$ sur $0^{m}.20$, placées en dehors des fermes et reposant sur les extrémités des traverses, deux rails destinés aux mouvements que les grues roulantes, placées au-dessus de chaque pile, avaient à exécuter pendant la construction des voûtes.

Au-dessus de chaque pile, les travées étaient reliées par une semelle de 6 mètres de longueur et de $0^{m}.20$ d'équarrissage, fixée sous la longrine inférieure; en outre, dans cette partie qui correspondait à la position habituelle des grues de distribution et au point de force des verrins de levage, la croix de Saint-André était formée de croisillons plus forts et consolidée par 2 potelets verticaux.

La passerelle reposait sur la maçonnerie des piles, soit directement, soit par l'intermédiaire de chantiers en bois,

lesquels, au moment du levage du pont, avaient une hauteur de 1m.50 au maximum. Il sera donné, plus loin, les détails qu'il convient sur la manière dont les maçonneries se sont exécutées à l'aide du pont de service, aux diverses périodes de la construction; mais disons avant comment les matériaux étaient distribués sur ce pont et les divers moyens employés pour les y amener.

Distribution des matériaux. — Les matériaux, moellons bruts, pierres de taille, moellons piqués, contenus dans des caisses, dites *bourriquets*, ou portés sur des plateaux, étaient placés sur des trucs, que l'on poussait à bras sur deux voies de fer établies sur le plancher supérieur de la passerelle; on les conduisait ainsi jusque sous des grues, fixées sur la passerelle au-dessus de chaque pile, lesquelles saisissant les caisses ou les plateaux par les quatre anneaux de fer fixés à leurs angles, enlevaient les matériaux et les descendaient sur les maçonneries. Quant au mortier, il était porté à dos par des enfants qui le prenaient dans leurs hottes au lieu d'arrivée, sur le plancher inférieur du pont de service, et allaient, au moyen de ce plancher, le verser dans des couloirs en bois établis au-dessus de chaque pile.

Grues de distribution. — La disposition générale des grues roulantes n'avait rien de particulier; ces grues consistaient en deux cours de doubles longrines, ayant 0m.20 d'équarrissage et 9m.20 de longueur, moisées à moises doubles aux deux extrémités, chacun de ces cours de longrines portant des tasseaux, de 10 centimètres de hauteur, espacés de mètre en mètre, sur lesquels se fixaient les coussinets des rails destinés au mouvement d'un treuil à frein et à double manivelle. Ces longrines s'assemblaient, à 2m.65 de leurs extrémités avec des pièces inclinées de 0m.20 d'équarrissage, moisées à leur pied par deux pièces en bois de 0m.22 sur 0m.11 portant les coussinets de galets en fonte, de 0m.52 de diamètre, à l'aide desquels les grues pouvaient rouler sur les rails fixés, comme il a été dit plus haut, sur

les bords du pont de service. De chacune de ces pièces inclinées partaient deux jambes de force, venant s'embrêver aux longrines. Une grue de ce genre était établie sur le pont de service au-dessus de chaque pile. Durant la construction des piles, ces grues étaient fixes; elles ne devenaient mobiles que durant la période de l'exécution des voûtes; pendant cette période, pour éviter toute chance de bascule, on les fixait aux divers points du pont de service, à l'aide de forts crochets en fer, portés par la moise inférieure du bâtis des grues, et s'engageant dans des pitons fixés aux longrines de la passerelle. Les matériaux amenés par les trucs, soit dans des bourriquets, soit sur les plateaux, puis enlevés par le treuil placé sur la grue, on poussait le chariot de ce treuil sur les rails, jusqu'à l'extrémité des longrines, lesquelles faisaient sur la passerelle une saillie suffisante pour permettre la descente des charges; puis, à l'aide du frein, on laissait arriver doucement ces matériaux sur les maçonneries, où ils se déchargeaient à la main. Ainsi qu'on l'a dit plus haut, la passerelle de service reposait sur les maçonneries et s'élevait au fur et à mesure qu'elles montaient elles-mêmes. Pour faire ce levage, on plaçait sur chacune des piles, au-dessous de la passerelle, quatre verrins (Pl. 136, *fig.* 7), deux sous chaque ferme. Ces verrins pouvaient lever 8 000 kilogrammes chacun; leur course était de $0^{m},50$. A chaque levage de la passerelle, on la relevait soit de 1 mètre, soit de $1^{m}.50$, ce qui exigeait trois courses complètes des verrins; après chaque course, la passerelle était calée à l'aide de chantiers en bois.

Appareils servant à amener les matériaux sur le pont de service. — Il reste à dire comment les matériaux arrivaient sur le pont de service. Les procédés employés ont varié suivant la hauteur de la passerelle, par rapport aux niveaux du fond de la vallée et des deux plateaux aux abords; et à ce point de vue, comme on l'a dit plus haut, on doit diviser la construction en trois phases; pendant la première phase,

les matériaux ont tous été montés du fond de la vallée sur la passerelle de service; pendant la dernière, ils ont tous été amenés sur cette passerelle des deux plateaux aux abords. Pendant la phase intermédiaire, les matériaux sont venus simultanément du fond de la vallée et des deux coteaux.

Montage à la machine. — Depuis l'origine des travaux jusqu'au moment où les maçonneries ont été arasées au-dessus des petites voûtes transversales des fûts supérieurs, c'est-à-dire jusqu'à une hauteur de 25 mètres au-dessus des quais, le montage des matériaux s'est exclusivement effectué à l'aide de machines à vapeur. Dans toute cette période de la construction, c'était au fond de la vallée qu'arrivaient tous les matériaux; c'était la rade de Morlaix ou les îles voisines de cette rade qui fournissaient les moellons bruts ou piqués, la pierre de taille, le sable; tous ces matériaux étaient transportés, soit par bateaux à voile, soit par des chalands que remorquait un bateau à vapeur; les blocs pour pierres de taille et pour moellons piqués, étaient déposés aux chantiers de taille, situés sur la rive droite de la rivière, au bord même du chenal, à 2 kilomètres en aval du viaduc; puis, une fois travaillés, ils étaient conduits chaque jour à pied-d'œuvre, au prorata des besoins, à l'aide d'un chemin de fer établi le long des quais de la rive droite. Les bateaux portant les moellons bruts et le sable pénétraient dans le bassin à flot, et déchargeaient ces matériaux tant sur les quais, aux abords du viaduc, que sur la place existant au pied de l'ouvrage. A chaque marée, les bateaux apportaient ce qui était nécessaire à la consommation de la journée. Toutefois une réserve considérable de sable et de moellons bruts était approvisionnée pour parer à l'insuffisance qui pouvait résulter, dans les approvisionnements quotidiens, des gros temps et du mauvais état de la mer. Ces matériaux, enfermés dans des bourriquets, ou empilés sur des plateaux, étaient conduits sur des trucs, à

l'aide de voies de fer, jusqu'aux chaînes d'attache du monte-charge.

Ce monte-charge se composait de trois parties :

1° Les machines à vapeur produisant le mouvement ;

2° Les mécanismes destinés à le transmettre et à le régler ;

3° Les appareils de réception des matériaux à leur arrivée sur le pont de service.

Tous ces apparaux étaient établis entre les deux piles les plus élevées du viaduc, piles nos 9 et 10, lesquelles correspondaient aux deux quais du bassin à flot. Chacun d'eux était double, les mêmes opérations se faisant à l'aval et à l'amont du pont de service, c'est-à-dire qu'il y avait deux machines à vapeur, deux appareils de transmission de mouvement et deux appareils de réception sur la passerelle.

Chaque machine à vapeur consistait en une locomobile de la force de 5 chevaux, travaillant à 6 atmosphères. La machine était établie au fond de la vallée, au niveau des quais du port, sur la plate-forme comprise entre les piles nos 9 et 10, sous l'emplacement de la voûte de l'étage inférieur. Cette machine imprimait le mouvement de rotation à un tambour de 1 mètre de largeur, portant deux courroies en cuir, dont l'une était croisée pour renverser le mouvement.

Le mécanisme de transmission était placé en avant de la machine à vapeur correspondante, et en dehors de la largeur des voûtes inférieures. Il était porté (Pl. 136, *fig.* 6) par une plaque de fonte à nervures de 0m.03 d'épaisseur, fixée verticalement sur un fort châssis en bois, établi dans une position invariable sur une plate-forme de maçonneries.

Ce mécanisme comprenait d'abord deux poulies en fer forgé de 0m.98 de diamètre et de 0m.20 de largeur de jante recevant les courroies du tambour et montées sur le même arbre qu'un pignon de vingt dents. Elles étaient d'ailleurs folles sur cet arbre, avec lequel on les rendait alternative-

ment solidaires au moyen d'un manchon d'embrayage avec levier à fourchette. Ce premier pignon conduisait une roue de 90 dents, portant concentriquement à la partie dentée, une surface cylindrique sur laquelle s'enroulait une lame d'acier, manœuvrée par un levier et formant frein. Sur l'arbre de cette roue était monté un pignon de 18 dents, donnant le mouvement à une seconde roue de 60 dents, dont l'arbre portait une roue à gorge (de l'espèce dite *barbotin*), travaillée pour engrener avec les maillons d'une chaîne, au moyen de creux et de saillies convenablement ménagées dans cette gorge. En quittant cette roue à gorge, les deux brins de la chaîne passaient chacun sur une poulie placée au-dessus de la passerelle de service; on voit, d'après cette disposition, que tandis que l'un des brins de la chaîne montait avec le fardeau qu'elle supportait, l'autre brin redescendait pour venir prendre la charge qui l'attendait à terre.

L'appareil de réception sur le pont de service et les poulies de renvoi de la chaîne de levage étaient portées par une travée spéciale de la passerelle (Pl. 136, *fig.* 2, 3 et 4). Cette travée consistait dans la charpente décrite plus haut, comme formant les travées courantes du pont de service, ladite charpente étant consolidée : 1° par une sous-poutre de $0^m.35$ sur $0^m.20$ d'équarrissage, placée sous la longrine supérieure, et appuyée par deux contre-fiches venant s'embrêver sur la longrine inférieure, au droit des chantiers de bois, par l'intermédiaire desquels la travée reposait sur les maçonneries; 2° par une armature formée d'un poinçon renversé en fonte et de deux tirants fixés, d'une part à ce poinçon et de l'autre aux extrémités de la travée; 3° par deux longrines centrales, l'une supérieure, l'autre inférieure, reliées comme les longrines de rive. Cette travée supportait d'abord le bâti destiné à soutenir les poulies de renvoi des chaînes de levage, et l'échafaudage qui recevait les planchers en encorbellement sur lesquels se faisait l'arrivée des matériaux; elle

portait, en outre, un petit avant-corps en charpente, dont il sera parlé plus tard, et qui servait à la réception des mortiers. Il serait sans intérêt d'entrer dans la description de ce bâti et de ces planchers; on fera seulement ressortir la façon dont les bourriquets ou plateaux de matériaux arrivaient sur la plate-forme qui leur était ménagée. Au droit de chacune des poulies, le plancher en encorbellement était percé d'une ouverture de $0^m.50$ sur $1^m.80$ laissant passer la chaîne de levage : des deux côtés de cette ouverture, se trouvaient les deux panneaux d'une trappe à charnière, portant chacun sur leur bord extérieur, à l'écartement de la voie des trucs, un bout de rail qui venait se mettre, la trappe fermée, en prolongement de la voie fixe, perpendiculaire à l'axe longitudinal du viaduc, portée par la passerelle. Lorsque le bourriquet de matériaux arrivait au niveau du plancher, on ouvrait la trappe et on laissait continuer l'ascension du bourriquet jusqu'à ce qu'il fût assez élevé au-dessus du niveau du plancher pour que l'on pût amener un truc au-dessous de la charge; à ce moment, les hommes placés en bas, au levier d'embrayage et au frein rendaient les deux poulies de transmission folles sur l'arbre et serraient le frein. On baissait la trappe, le truc venait sur les rails recevoir le bourriquet, que l'on décrochait et que l'on conduisait à la plaque tournante, à l'aide de laquelle on l'envoyait sur la voie de service; puis on renversait le mouvement, en embrayant en bas avec la seconde poulie de transmission; le brin de la chaîne qui venait de monter, descendait, et l'autre remontait avec sa charge vers la trappe voisine où se faisait la même opération.

Tous les apparaux qui viennent d'être décrits, servaient exclusivement au montage des pierres. Le mortier arrivait au pont de service à l'aide d'un mécanisme spécial comprenant, comme le monte-charge des pierres, trois parties, le moteur, l'appareil de transmission de mouvement, et l'appareil de réception. Le moteur était une machine à vapeur

locomobile de la force de 2 chevaux, établie près de celles servant au montage des pierres. Cette machine imprimait un mouvement de rotation à un tambour, à axe horizontal, lequel à l'aide d'une courroie et d'un second tambour transmettait le mouvement à un arbre horizontal (Pl. 136, *fig.* 5) portant une roue d'angle, laquelle engrenait avec une roue semblable, montée à la partie supérieure d'un arbre vertical, dont la partie inférieure était munie d'une vis sans fin. Cette vis engrenait avec une roue dentée fixée sur un arbre horizontal, sur lequel était monté un tambour cubique, lequel prenait, par l'effet de la machine, un mouvement de rotation autour de son axe horizontal. La travée spéciale de la passerelle, décrite ci-dessus, supportait un second tambour identique. Sur ces deux tambours s'enroulait une chaîne articulée, dont chaque élément était formé d'un cadre pouvant s'appliquer exactement sur l'une des faces des tambours, dont le mouvement de rotation produisait ainsi le mouvement ascensionnel des cadres. Le mortier, préparé aux manéges établis au niveau de la partie inférieure de l'appareil, était placé dans des augets munis de deux crochets, lesquels étaient rangés sur des trucs, et conduits par des voies de fer jusqu'à la chaîne de levage : on accrochait un auget plein à chacune des barres horizontales des cadres de cette chaîne, au fur et à mesure que ces barrres passaient sur le tambour inférieur; et le mouvement de la chaîne sans fin les conduisait jusqu'au droit d'un petit appontement porté par la partie inférieure de la travée spéciale, où un homme décrochait les augets au passage, et les remettait aux goujats qui allaient, par le plancher inférieur du pont de service, les verser dans les couloirs placés au-dessus de chaque pile. En même temps, un second ouvrier recevait, sur ce même appontement, les augets vides et les accrochait à la partie descendante de la chaîne, qui les ramenait à terre.

Service par les plateaux. — A partir du moment où les

maçonneries ont été arasées au-dessus de l'extrados des petites voûtes transversales des fûts supérieurs, on a commencé à employer, dans les maçonneries d'intérieur, une certaine proportion de moellons de grès ou de schiste dur, provenant des plateaux situés aux abords du viaduc. Ces matériaux étaient conduits sur le pont de service à l'aide de plans inclinés, établis à flanc de coteau, avec voies de fer sur lesquelles des trucs à frein transportaient les caisses de matériaux jusqu'à la passerelle de service. Le montage à la machine a d'ailleurs été entièrement supprimé, lorsque les maçonneries ont atteint 40 mètres au-dessus du sol. A partir de cette élévation, le service par le haut devenait très-facile, les pentes des plans inclinés se réduisant beaucoup; et, dès ce moment, c'est sur les plateaux que se sont établis les chantiers de taille, les manéges à mortier et les ateliers de charpentage.

Cintres. — Pour terminer la description des échafaudages, il reste à dire quelques mots des cintres, de leur mise en place et de leur démontage. Les cintres en eux-mêmes ne présentent aucune particularité digne de remarque; ils sont à très-peu près semblables à ceux employés dans divers ouvrages analogues et se sont parfaitement comportés.

La mise en place de ces échafaudages s'est faite d'une façon peu différente aux deux étages de voûtes. Pour monter les cintres inférieurs, on a commencé par placer sur les impostes, où des corbeaux provisoires avaient été ménagés à cet effet, les semelles destinées à supporter les boîtes de décintrement. Entre ces deux semelles, on en a soutenu une troisième, à l'aide d'un échafaudage montant reposant sur le sol; sur ces trois semelles on a placé deux fortes traverses au-dessus desquelles on a établi un plancher formé de bordages et percé d'une trappe latérale par laquelle les pièces de bois étaient montées sur le plancher à l'aide des grues de distribution de la passerelle de service. On amenait d'abord ainsi sur le plancher le poinçon et les deux arbalé-

triers; trois chèvres étaient d'ailleurs établies sur le plancher : chacune d'elles saisissait une de ces pièces; on les assemblait, puis on plaçait les deux grandes moises de la ferme, et l'on passait à la ferme suivante. Les autres pièces de cintres étaient placées à l'aide de l'espèce d'échafaudage que formaient ces premières pièces. Le démontage des cintres, après décintrement, s'opérait d'une façon semblable. Pour monter et démonter les cintres supérieurs on s'est aussi servi d'un plancher; seulement, la traverse qui le supportait, était soutenue par deux semelles reliées par deux grands tire-fonds à la passerelle de service, laquelle était elle-même consolidée par deux jambes de force, venant buter sur l'imposte des naissances. Les pièces de bois étaient descendues du pont de service sur le plancher, à l'aide des grues de distribution, puis elles étaient mises en place, comme à l'étage inférieur.

5° DURÉE D'EXÉCUTION. — TRAVAIL PRODUIT.

Durée des travaux.—Les travaux préparatoires pour fondations des deux piles en rivière ont été entrepris dans le courant du mois de juin 1861; mais les terrains nécessaires à l'établissement du viaduc n'ayant été libres que dans le courant du mois d'août, c'est à cette époque seulement que les travaux ont pu être conduits avec activité. Le tableau ci-après indique le cube de maçonnerie exécuté mensuellement depuis le mois d'août 1861 jusqu'au mois de septembre 1863, date de l'achèvement des maçonneries.

Années.	Janvier.	Février.	Mars.	Avril.	Mai.	Juin.	Juillet.	Août	Septembre.	Octobre.	Novembre.	Décembre.
	mètr.	mètr.	mètr.	mètr.	mètr.	mètr.	mètr.	mètr.	mètr.	mètr.	mètr.	mètr.
1861	»	»	»	»	»	»	»	2 000*	1 700	1 730	1 170	930
1862	1 600	2 430	4 100	3 500	4 000	3 500	3 500	4 500	5 000	3 550	1 860	1 130
1863	760	900	3 300	3 300	2 400	2 070	2 140	2 940	1 700	»	»	»

* Y compris le travail antérieur.

Le cube total de l'ouvrage étant de 65 830 mètres, on voit que le travail mensuel moyen a été d'environ 2 630 mètres cubes de maçonneries, en comptant sur un travail total de 25 mois.

Voici d'ailleurs quelles ont été les diverses périodes de travail. Le cordon des naissances inférieures a été arasé le 31 mars 1862 ; puis toutes les voûtes de cet étage ont été commencées, sans cintres jusqu'à la septième retombée. Les cintres ont été mis au levage le 15 avril et achevés le 1er mai ; le 15 juin, toutes les voûtes inférieures étaient finies ; le 30 juin, elles étaient toutes décintrées. Le 10 juillet, l'étage inférieur était terminé, et le 31 juillet les voûtes transversales au-dessus du couronnement de cet étage étaient fermées. On a achevé la pose du cordon des naissances supérieures le 6 avril 1863 ; au 30 avril, toutes les voûtes du second étage étaient montées, sans cintres, jusqu'à la sixième retombée. On a commencé la mise des cintres au levage le 12 mai ; chaque jeu a eté monté en 4 jours ; le 1er juillet, tous les cintres étaient en place ; la première voûte a été finie le 9 juin et décintrée le 4 juillet ; la dernière a été fermée le 31 juillet et décintrée le 17 août ; au 1er septembre on commençait à poser la plinthe de couronnement, et dans les premiers jours d'octobre, on achevait la pose du parapet ; le 19 novembre 1863, tous

les échafaudages étaient démontés et les bois descendus.

Personnel employé. — Le nombre total de journées d'ouvriers et de chevaux employés a été de 428 630, correspondant à 6 journées et demie par mètre cube de maçonnerie, tout compris. Ce nombre de journées se répartit comme suit :

Carriers.	93 475	Goujats.	35 200
Tailleurs de pierre. . .	46 227	Manœuvres.	143 429
Charpentiers.	13 675	Bardeurs.	7 300
Scieurs de long.	4 020	Charretiers.	12 654
Charrons.	2 125	Marins.	42 300
Forgerons.	5 430	Chevaux.	22 525
Maçons.	42 728		

En considérant spécialement les ouvriers affectés aux maçonneries, on voit que chaque mètre cube a nécessité, en moyenne, 0.65 de journées de maçons, et de 0.55 de journées de goujats. La superficie totale du parement de granit taillé étant de 29.869^{mc}.18, on reconnaît que la taille du mètre carré de parement, ragrément compris, correspond à 1^{journée}.58 de tailleur de pierres; nous devons ajouter que ce temps comprend celui consacré à l'ébauchage qui ne se faisait pas en carrière, les pierres venant sur le chantier de taille comme la fente les donnait. Le cube des maçonneries en pierres d'appareil étant de 11.125 mètres, chaque mètre cube suppose l'emploi de 0,65 de journée de bardeur.

Frais d'échafaudage. — Nous avons dit plus haut comment s'était fait le montage des matériaux mis en œuvre dans le viaduc; nous allons maintenant rendre compte du prix de revient des divers apparaux employés pour le montage.

Le premier élément du prix de revient est la dépense relative au pont de service. Chaque travée ordinaire contenant 26$^{m.c.}$.60 de bois, 930 kilogrammes de fer, 480 kilogrammes de fonte et pesant 20 030 kilogrammes, est revenue à 3 300 francs mise en place; la travée spéciale supportant les renvois de mouvement, et contenant 54 mètres

de bois, représente une dépense de 6 000 francs. Les grues de distribution, contenant 3 mètres cubes de bois et 36 kilogrammes de fer, et pouvant descendre 2 000 kilogrammes. ont coûté 300 francs chacune; le treuil de ces grues coûtait le même prix. Pour relever la passerelle, on employait un jeu de quatre verrins par travée, représentant une force de 32 000 kilogrammes, et une dépense de 700 francs avec les barres. Les plateaux supportant les pierres de taille, pendant le montage, et portant 1 mètre cube, coûtaient 60 francs; les bourriquets, pour 1 mètre cube de moellons bruts, 75 francs et les wagonnets de service, portant 1 mètre cube, 175 francs.

D'autre part, les machines à vapeur servant au montage étaient au nombre de trois; deux machines fixes de 5 chevaux avec monte-charge, le tout coûtant 27 000 francs mis en place; et une machine locomobile de 2 chevaux avec chaîne, monte-mortier et accessoires, coûtant 7 000 francs.

Dans ces conditions, le prix d'établissement des échafaudages et apparaux de service pour le montage et la distribution des matériaux, se compose comme suit :

	fr
16 travées (y compris les travées allant des culées aux remblais) à 3 300 francs l'une	52 800
Travée spéciale.	6 000
14 grues de distribution et leurs treuils à 600 francs l'un.	8 400
16 jeux de verrins à 700 francs l'un.	11 200
Machines à vapeur, monte-charge, monte-mortier.	34 000
40 plateaux à 60 francs l'un.	2 400
40 bourriquets à 75 francs l'un.	3 000
80 trucs ou wagonnets de service à 175 francs l'un.	14 000
Total.	131 800

La dépense pour échafaudage et appareils de montage a donc été d'environ 132 000 francs, soit de 2 francs par mètre cube de maçonneries, ou de un vingtième environ de la dépense d'exécution.

Frais de montage à la machine. — Les machines ont monté, en moyenne, un cube journalier de 100 mètres de matériaux. Elles représentaient, d'ailleurs, une dépense quotidienne de 40 francs s'établissant comme suit :

	fr.
6 hectolitres de charbon.	18.00
3 litres d'huile.	4.80
1 mécanicien	6.00
2 chauffeurs.	8.00
Entretien.	3.20
	40.00

La dépense des monte-charges était de 15 francs par jour, se décomposant comme suit :

	fr.
Graissage et entretien du mécanisme. . . .	7
Salaire de deux gardes-freins.	8
Total.	15

La dépense de montage, indépendamment du bardage et du service sur la passerelle, a donc été, en moyenne, de $0^{f}.55$ par mètre cube de matériaux.

En ce qui concerne le mortier, la dépense quotidienne de la locomobile, en huile, en charbon et entretien était de 10 francs; le service en était fait par les chauffeurs des autres machines. Le cube du mortier, monté par jour, étant de 35 mètres, le prix par mètre cube correspondant au montage du mortier était de $0^{f}.30$.

Comme on l'a vu plus haut, à partir du moment où les maçonneries ont été arasées au-dessus des petites voûtes transversales, on a fait, concurremment avec le montage à la machine, le service par le plateau de Saint-Martin, à l'aide de wagonnets à frein, descendant sur des plans inclinés, dont la pente maximum a atteint 15 p. 100. Le prix de descente d'un mètre cube de matériaux, avec ce mode de service, a été en moyenne de $0^{f}.40$.

Frais d'approche et de distribution des matériaux. — Nous

avons dit le prix du montage ou de la descente des matériaux sur le pont de service; il nous reste à dire ce que représentait l'approche de ces matériaux des appareils de montage ou de descente et leur distribution sur le pont de service.

Prenons d'abord le cas du service par la machine. Le service d'approche des moellons était fait, en bas, par huit hommes poussant les trucs, et accrochant ou décrochant les bourriquets aux chaînes de montage; en haut, le service de réception était également fait par huit hommes, qui faisaient la manœuvre des trappes, décrochaient les bourriquets, les faisaient reposer sur les trucs, les poussaient sur des plaques tournantes et les mettaient sur les voies de distribution : seize hommes étaient affectés à la conduite des wagonnets sous les grues; vingt-huit hommes étaient employés à la manœuvre des grues, soit, en tout soixante hommes payés en moyenne 2f.50 par jour, plus un surveillant à 5 francs. La dépense quotidienne était donc de 155 francs par jour, ou d'environ 1f.55 par mètre cube de matériaux. Pour le mortier, le service d'approche était fait en bas, comme suit : quatre hommes chargeaient les boîtes aux manéges et les rangeaint sur les trucs; huit hommes conduisaient les trucs à la chaîne monte-mortier et les ramenaient au manége; deux hommes accrochaient les boîtes pleines à la chaîne et décrochaient les boîtes vides; ces hommes étaient payés en moyenne 2 francs par jour. En haut, deux hommes décrochaient les boîtes pleines et accrochaient les boîtes vides; un autre les versait dans le bassin où deux ouvriers chargeaient les boîtes des mousses; ces hommes étaient payés 2f.50; cinquante mousses, payés 0f.80 en moyenne, portaient ce mortier aux couloirs établis au-dessus de chaque pile. On voit que le service d'approche et de distribution des mortiers représentait une dépense journalière de 81f.50, soit de 2f.32 en moyenne par mètre cube.

Le service par les plateaux de Saint-Martin et du Créou a donné une dépense plus faible, surtout en ce qui concerne le mortier; on peut la fixer à 1f.35 par mètre cube de matériaux et à 1f.60 par mètre cube de mortier.

Frais de levage de la passerelle. — Ainsi qu'on l'a vu ci-dessus, on relevait la passerelle de service au fur et à mesure de l'élévation des maçonneries; au moment où cette passerelle a eu sa plus grande longueur, cette opération durait, en moyenne, six heures; elle exigeait quatre verrins par travée ordinaire, et dix verrins pour la travée spéciale, avec quatre hommes par verrin; en outre, un charpentier commandait la manœuvre et la surveillait sur chaque pile; un levage du pont complet donnait lieu à une dépense de 516 francs répartie comme suit :

		fr.
16	demi-journées de charpentier à 6 francs.	96
280	— de manœuvre de choix à 3 francs.	420
	Total.	516

Le pont n'ayant atteint sa longueur complète que pour une partie des levages, on peut dire que le prix moyen d'un levage a été de 450 francs; on en a fait quarante; la manœuvre de la passerelle a donc représenté une dépense totale de 18 000 francs.

Résumé du prix de revient du service de montage et de distribution. — Tout ce qui vient d'être dit permet d'établir le prix auquel est revenu en moyenne, par mètre cube de maçonnerie, le montage et la distribution des matériaux, en admettant que les échafaudages et les machines aient subi, à la fin du travail, une dépréciation des deux tiers de leur valeur, ce qui porte à 88 000 francs la somme à compter pour échafaudages, prix auquel il faut ajouter 18 000 francs pour les levages de la passerelle, soit 1f.61 par mètre cube de maçonneries. Dans ces conditions, le prix de montage à la machine, et de distribution sur les piles, se compose comme suit pour 1 mètre cube de maçonneries :

	fr.
Frais d'échafaudage.	1.61
Montage des pierres.	0.55
— du mortier 0.35 × 0.30.	0.11
Approche et distribution des pierres. . . .	1.55
— du mortier 0.35 × 2f.32. .	1.28
Total.	5.10

Avec le service par les plateaux de Saint-Martin et du Créou, le prix a été beaucoup moindre, et peut être calculé comme ci-dessous :

	fr.
Frais d'échafaudage (défalcation faite des machines).	1.10
Descente des pierres.	0.40
Distribution des pierres.	1.35
Descente et distribution du mortier (1.60 × 0.35). . .	0.56
Total.	3.41

6° DÉPENSES ET RENSEIGNEMENTS DIVERS.

Dépenses. — Le décompte des travaux à l'entreprise, décompte accepté par l'entrepreneur, s'élève à 2 502 905f.23 et se décompose comme suit :

mètres.		francs.	
17235.23	de déblais pour fouilles de fondations transportés en dépôt, dérasement du rocher compris.	47151.74	Soit 2f.75 par mètre cube.
48266.11	de maçonneries de moellons bruts, avec mortier de chaux hydraulique.	1097793.80	Soit 23f.51 par mètre cube.
3942.59	de maçonnerie de moellons bruts, avec mortier de ciment.	130099.92	
50.51	de maçonnerie de moellons équarris. . . .	2631.57	Soit 52f.10 par mètre cube.
8401.67	de maçonnerie de moellons piqués de parement, taille comprise.	639662.64	Soit 76f.13 par mètre cube.
2724.21	de maçonnerie de pierres de taille (taille comprise).	360134.78	Soit 132f.19 par mètre cube.
1259.95	de pavage posé au ciment.	17828.29	Soit 14f.15 par mètre quarré.
985.38	de maçonnerie avec mortier maigre. . . .	18160.55	Soit 18f.43 par mètre cube.
2931.08	de chape en mortier avec enduit en asphalte.	24692.49	Soit 8f.42 par mètre quarré.
809.70	de sable sous le ballast.	2129.51	Soit 2f.63 le mètre.
	Gargouilles en fonte.	1428.53	
	Tirants et crampons.	8566.57	
	Cintres et leurs accessoires.	152624.84	
	Total.	2502905.23	

A ce chiffre de 2 502 905f.23 doit être ajoutée une somme à valoir de 171 635f.23 qui a été dépensée en régie et affectée, pour la presque totalité, à divers travaux aux abords du viaduc : déviation de rues, exécution de murs de soutenement, confection des quarts de cône, d'escaliers, etc. La dépense totale pour le viaduc et ses abords a donc été de 2 674 540f.46. Les prévisions du projet adjugé étaient de 2 656 500 francs.

On voit donc que l'imprévu n'a eu qu'une importance extrêmement minime dans l'exécution de cet ouvrage.

Voici, d'autre part, comment les dépenses se sont réparties par sections horizontales de l'ouvrage :

			francs.
Fondations.	. . . .		283 220.80
		francs.	
1er étage. . .	Du dessus des fondations aux naissances des voûtes.	315 542.73	810 781.73
	Cintres des voûtes.	53 969.90	
	Des naissances à la plinthe du 1er étage (cette plinthe comprise).	441 209.10	
2e étage. . .	Du dessus du 1er étage aux naissances des voûtes du 2e.	761 347.20	1 408 903.42
	Cintres des petites voûtes transversales. . . .	3 081.07	
	Des naissances à la plinthe du 2e étage.	474 108.38	
	Cintres des voûtes.	95 573.87	
	Plinthe et parapet.	74 793.90	

Prix et cube par mètre superficiel d'ouvrage. La superficie verticale de l'ouvrage, vides et pleins confondus, est de 14 565m.67 dont 5 954.37 pour les pleins et 8 611.30 pour les vides; ces superficies sont mesurées entre le sol des fondations et le dessus du parapet; le rapport des vides aux pleins est donc de 1.45. Il en résulte que le prix par mètre superficiel, vides et pleins confondus, est de 171f.83 pour le viaduc en lui-même, et de 183f.61 en y comprenant les abords et travaux accessoires. Le cube de maçonneries, par mètre superficiel, est de 4m.51.

Prix moyen du mètre cube de maçonneries. — Le prix moyen

du mètre cube de l'ouvrage, tout compris, est de 34f.29 au-dessus des fondations, et de 38f.36, fondations comprises. En ajoutant au prix de l'ouvrage celui des travaux accessoires et des abords, on arrive à trouver que le mètre cube a coûté 40f.75.

Brest, janvier 1866.

N° 151

THÉORIE D'UN COURANT LIQUIDE

A filets rectilignes et parallèles de forme transversale quelconque. Application aux tuyaux de conduite.

Par M. MAURICE LÉVY, ingénieur des ponts et chaussées, ancien répétiteur suppléant de mécanique à l'Ecole polytechnique, docteur ès-sciences.

CHAPITRE PREMIER.

EXPOSÉ SOMMAIRE DE LA MÉTHODE SUIVIE ET DES RÉSULTAT OBTENUS. TABLE NUMÉRIQUE ET SOLUTION PRATIQUE DES DIVERS PROBLÈMES CONCERNANT LES CONDUITES D'EAU (*).

La plupart des mouvements que prennent les eaux à la surface du globe se rapprochent plus ou moins d'un mouvement idéal très-simple dans lequel toutes les molécules décriraient des lignes droites parallèles. De là vient qu'on commence toujours l'hydraulique par l'étude de ce mouvement simple, non pas qu'il représente exactement ou même d'une manière assez approchée pour la pratique, ce qui se passe dans la nature, mais parce que ses lois une fois connues, on n'aura plus qu'à étudier les écarts qui existent entre elles et les lois naturelles; c'est une première approximation qui facilite une approximation nouvelle, et ainsi de suite.

(*) J'ai donné dans ce chapitre une table numérique et les solutions des problèmes concernant les tuyaux de conduite, bien que ces questions n'eussent dû être traitées qu'à la fin de mon travail; mais, de cette manière, les ingénieurs qui ne voudront pas lire tout ce mémoire pourront, par la connaissance du seul chapitre Ier, en appliquer les résultats aux conduites d'eau.

C'est à cette méthode d'approximations successives qui se propose de rechercher d'abord le terme le plus important d'une loi pour en découvrir ensuite les termes secondaires, que nous devons presque tous les progrès de la physique moderne. Inaugurée en astronomie, où l'on a commencé par étudier le mouvement d'une planète comme si les autres planètes n'existaient pas, pour analyser ensuite les perturbations que les actions mutuelles de ces astres exercent sur la marche de chacune d'elles, elle a été appliquée successivement, tantôt par la voie expérimentale, tantôt par la voie rationnelle, à toutes les branches de la physique.

Pour en faire usage en hydraulique, il faudra :

1° Étudier d'une manière *complète et rigoureuse* le mouvement des liquides par filets rectilignes et parallèles;

2° Les écarts qui existent entre un tel mouvement et ceux qu'affectent réellement les liquides dans la nature.

Tous les ingénieurs savent qu'aucune de ces études, pas même la première, qui est comme le début de la science hydraulique, n'est faite. Le mouvement rectiligne et uniforme des liquides a donné lieu, il est vrai, à bien des théories; mais malgré cela, et c'est là la meilleure preuve que l'on n'a pas suivi la voie véritablement scientifique, on ne saurait, en ce qui le concerne, énoncer une seule de ces lois exactes, comme celles que l'on connaît, par exemple, sur les liquides en repos. Notre ignorance provient très-probablement de ce que l'on s'est trop abandonné aux hypothèses sans se préoccuper suffisamment des conditions mécaniques du mouvement que l'on étudiait, conditions mécaniques dont la connaissance eût épargné bien des suppositions. Ainsi M. Darcy, qui aura toujours la gloire d'avoir ouvert en hydraulique la voie expérimentale, c'est-à-dire la seule voie progressive, a résumé ses expériences par des formules empiriques desquelles il résulterait que le frottement de deux filets liquides serait proportionnel au quarré de la vitesse relative; sa formule représente très-

heureusement ses expériences ; cependant j'espère montrer que la loi qu'il en déduit pour le frottement et qui, au premier abord, ne semble avoir rien d'inadmissible, est pourtant contradictoire avec la définition mécanique du mouvement auquel elle doit s'appliquer, et cela quelque idée que l'on se fasse du frottement dans les liquides ou de la constitution intime de ceux-ci. Je montrerai en même temps que si l'on admet que le frottement entre deux molécules ne dépend que de leur vitesse relative, il ne peut être que proportionnel à cette vitesse relative elle-même, c'est-à-dire que l'hypothèse admise par Newton, Poisson et Navier serait dans ce cas seule possible. Mais cette hypothèse ne répond pas aux faits. Il faut en déduire que le frottement ne dépend pas de la vitesse relative seule ; et en effet, M. l'ingénieur Bazin, qui a poursuivi les recherches expérimentales commencées par M. Darcy et qui, par la manière dont il s'est acquitté de cette tâche, s'est élevé presqu'à la hauteur de cet éminent hydraulicien, a été conduit à penser que le frottement dépendait aussi de la vitesse absolue (*), sans pourtant énoncer à cet égard aucune loi précise.

L'introduction de la vitesse absolue dans l'expression du frottement semble d'abord compliquer l'analyse mathématique des questions de l'hydraulique. Cependant nous verrons qu'il n'en est rien. Elle ouvre aussi aux hypothèses un champ nouveau et infiniment plus vaste que l'ancien ; c'est dire que celui qui s'y aventurerait s'égarerait plus sûrement encore. Fonder en effet une analyse mathématique sur telle ou telle hypothèse dans une question aussi complexe et aussi

---

(*) Ce résultat n'a rien d'incompréhensible. On entend ici par vitesse absolue, la vitesse du liquide par rapport à la paroi *supposée en repos*. Il est bien évident que si l'on faisait mouvoir la paroi avec le liquide qu'elle contient, bien que cela modifiât les vitesses absolues, il n'en résulterait aucun changement dans les actions internes de celui-ci ; que, par exemple, le mouvement de la terre ne modifie pas ces actions pour les eaux qui se meuvent à sa surface.

obscure que celle des actions internes des liquides, c'est faire ce que l'on pourrait appeler un simple exercice de calcul algébrique; mais au point de vue de la science, ce serait aller à l'encontre de tout ce que prescrit la méthode expérimentale moderne. Aussi, cherchant à suivre la marche tracée, non pas en hydraulique, mais dans l'élasticité, dans la chaleur, l'optique, etc. par Lamé et aussi par Clapeyron, avons-nous opéré tout autrement, et voici comment nous procédons :

1° Nous n'admettrons que ce fait général sur lequel tous les expérimentateurs sont d'accord, savoir : que le frottement élémentaire entre deux molécules liquides est indépendant de la pression, qu'il ne peut par conséquent dépendre que des vitesses absolue et relative de ces deux molécules; mais nous ne ferons *à priori* sur la fonction des vitesses absolue et relative qui le représente aucune hypothèse particulière.

2° Nous montrerons d'abord, en nous appuyant sur les seules conditions mécaniques du mouvement uniforme des liquides, que cette fonction ne peut pas être quelconque; qu'elle est nécessairement le produit de la vitesse relative par une fonction de la vitesse absolue, c'est-à-dire que si l'on appelle T le frottement rapporté à l'unité de surface, au lieu d'avoir :

$$T = F\left(V, \frac{dV}{dr}\right),$$

F étant une fonction quelconque, on a nécessairement :

$$T = \frac{dV}{dr} \times \varphi(V),$$

φ étant une fonction quelconque. C'est là une première propriété certaine ne s'appuyant sur aucune hypothèse, et cette propriété exclut immédiatement la loi de M. Darcy sur la proportionnalité du frottement au quarré de la vitesse relative, et montre que si l'on admettait que le frottement ne

dépendît pas de la vitesse absolue, c'est-à-dire si l'on supposait φ (V) = constante, on retomberait sur la loi de Navier qui serait ainsi seule possible dans ce cas.

3° Nous rechercherons les propriétés générales du mouvement uniforme des liquides quelle que soit la forme du contour mouillé et sans *assigner à la fonction φ aucune forme particulière.* Ces propriétés, indépendantes de l'idée qu'on se fait du frottement, formeront la base de la théorie, base que ne pourront pas modifier les controverses ultérieures sur l'expression particulière à donner au frottement.

4° Nous rechercherons, toujours sans définir la fonction φ, la loi de répartition des vitesses dans un courant de forme transversale quelconque. L'équation que nous obtiendrons contiendra nécessairement une fonction inconnue de la vitesse, fonction dont la connaissance sera subordonnée à celle de la fonction φ et réciproquement.

5° Nous comparerons cette équation aux expériences de M. Darcy sur les tuyaux de conduite, ce qui donnera à la fois les écarts et les coïncidences qui existeront entre le mouvement idéal que nous aurons étudié et le mouvement qui se produit réellement dans les tuyaux; et si ces deux mouvements étaient les mêmes, nous pourrions de cette comparaison conclure la détermination *à posteriori* de la fonction φ et par suite la connaissance de la loi élémentaire du frottement. Mais cette loi, nous pourrons la présumer, bien que les deux mouvements ne soient pas absolument identiques.

Je ne m'étendrai pas ici sur les résultats obtenus par les différentes recherches que je viens d'énumérer, ayant surtout en vue d'indiquer aux ingénieurs la partie pratique concernant les tuyaux de conduite. Je citerai cependant, à cause de son utilité et de sa généralité, la propriété fondamentale que j'ai trouvée et qui s'énonce ainsi :

Quelle que soit la forme du contour mouillé d'un cou-

rant à filets rectilignes et parallèles, les courbes d'égale vitesse tracées dans une section transversale ont nécessairement même développée, c'est-à-dire qu'elles sont parallèles ou équidistantes (*).

Cette proposition ne suppose rien sur la loi particulière du frottement ; elle ne suppose rien sur la constitution des liquides, elle ne suppose même pas l'égalité de transmission des pressions, égalité qui, en effet, n'existe que dans les fluides parfaits, c'est-à-dire exempts du frottement, mais non dans des liquides naturels. On peut dire qu'elle est absolument vraie.

Elle m'a permis de résoudre très facilement le problème de la distribution des vitesses quelle que soit la forme curviligne ou polygonale du contour mouillé, problème qui n'a jamais pu être résolu en termes réels et finis que pour les conduites circulaires et qui ne l'a même été, pour ce cas spécial, qu'avec des hypothèses particulières sur le frottement. La formule à laquelle j'arrive peut paraître complexe parce que je la donne dans toute sa généralité, mais elle se simplifie toujours beaucoup dans la pratique. La voici :

$$F(V) - F(V_0) = \Pi i \left[\frac{1}{4}(n - n_0)^2 + \frac{s_0}{2e}(n - n_0) + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{\omega_0}{e} - \frac{s_0^2}{2e^2} \right) lgnp . \left(\frac{s_0 + e(\eta - n_0)}{s_0} \right) \right].$$

Π est le poids du mètre cube d'eau ;

i, la pente par mètre courant (ou perte de charge, s'il s'agit de tuyaux) ;

s_0 et l_0, la section et le périmètre mouillé de l'une quelconque des courbes d'égale vitesse prise, en quelque sorte, pour repère ; ce peut être, si l'on veut, la paroi quand il s'agit des tuyaux ;

(1) Ce théorème est vérifié parfaitement par les expériences de M. Bazin sur les tuyaux rectangulaires. — Voir p. 271.

V_0, la vitesse le long de cette courbe; e l'angle des normales à ses deux extrémités (*);

V, la vitesse en un point quelconque dont la distance à la précédente courbe est n (n est donc la longueur de la normale abaissée du point dont la vitesse est V à ladite courbe.)

F, une fonction dépendant de la nature de la fonction φ, relative au frottement. On a entre φ et F la relation très-simple :

$$\varphi = F'(V) = \frac{dF(V)}{dV}.$$

Dans le cas des tuyaux circulaires, si l'on prend pour courbe-repère le filet central, on a : $s_0 = 0$, $l_0 = 0$ et il vient simplement :

$$F(V) - F(V_0) = \frac{\Pi i r^2}{4}. \qquad (2)$$

V_0 étant la vitesse du filet central et r la distance du point dont la vitesse est V au centre;

Si l'on compare cette équation aux expériences de M. Darcy, on trouve que la fonction F (V) qui satisfait le mieux aux expériences est :

$$F(V) = -\varepsilon V^2.$$

(*) e est égal à 360 degrés ou plutôt à 2ϖ quand la courbe est fermée comme dans les tuyaux. S'il s'agit d'un contour polygonal la formule reste la même, mais e prend une signification un peu différente. Si l'on appelle a, a_1, a_2, etc... les angles extérieurs du polygone, on a :

$$e = \text{tang}\,\frac{a}{2} + \text{tang}\,\frac{a_1}{2} + \text{tang}\,\frac{a_2}{2} + \text{etc.....} = \Sigma\,\text{tang}\,\frac{a}{2}.$$

Dans le cas d'un tuyau rectangulaire comme ceux sur lesquels a opéré M. Bazin, on a :

$$a = a_1 = a_2 = a_3\ldots\ldots = 1 \text{ droit}; \quad \text{d'où} \quad e = 4.$$

D'où la formule ci-dessus devient :

$$\varepsilon (V^2_0 - V^2) = \frac{\Pi i r_2}{4}. \qquad (3)$$

Mais on reconnaît que le coefficient ε n'est pas rigoureusement constant et qu'aucune fonction F (V), coefficients constants, ne peut comprendre d'une manière assez complète toutes les expériences. Comme pourtant la formule (2) est exacte et ne repose sur aucune hypothèse quand il s'agit du mouvement rectiligne, il faut conclure que, dans les tuyaux de conduite, le mouvement n'est pas rigoureusement rectiligne, et ceci m'amène naturellement à parler de la seconde des études que j'ai indiquées en commençant.

L'étude des perturbations que subit le mouvement rectiligne dans les eaux courantes naturelles peut se faire de deux manières : ou par l'analyse, ou par les procédés expérimentaux et empiriques. Pour pouvoir appliquer l'analyse, il faut, avant tout, poser les équations générales du mouvement des liquides naturels données pour la première fois par Navier, mais en excluant l'hypothèse de ce savant comme aussi en excluant toute autre hypothèse qui ne serait pas vérifiée par les faits et en opérant, pour ce cas général, comme j'ai fait dans le cas particulier du mouvement uniforme. C'est un travail que j'ai commencé et que j'espère terminer bientôt ; je suis même arrivé analytiquement à ce que j'ai appelé en commençant le second degré d'approximation dans le cas de certains mouvements lents comprenant notamment le remou à l'amont des barrages (*).

Ici je voulais surtout faire la théorie complète et exacte du mouvement uniforme, d'abord parce que logiquement

(*) Aujourd'hui, ce travail est terminé : il est soumis à l'Institut et pourra, je pense, être publié bientôt. (*Note du 30 août 1867.*)

c'est par là qu'il faut commencer, ensuite parce que les propriétés trouvées pour ce mouvement seront très-utiles dans la théorie générale du mouvement des liquides, et enfin parce que la formule (5) trouvée pour ce mouvement s'applique très-bien aux tuyaux moyennant un coefficient de correction qui s'explique très-facilement (*). Les coefficients de correction ont été employés dans les questions les plus simples de l'hydraulique, celles des orifices. Là, on substitue aux orifices réels les sections de la veine contractée quand on veut calculer le débit; rien n'est plus rationnel, parce que ce n'est que dans la veine rétrécie que les filets liquides deviennent réellement parallèles; mais pour les tuyaux, les formules théoriques ont toujours été si loin de la vérité qu'on n'a pas pu les corriger; il aurait fallu les modifier complétement. Il n'en est pas de même de la formule (5). Je dis que les variations de ε sont dues uniquement à ce que le mouvement, dans les tuyaux, n'est pas rigoureusement rectiligne. Si cette assertion est exacte, ε ne doit varier qu'avec la flèche des trajectoires décrites par les molécules liquides; or ces flèches sont nulles au centre du tuyau et augmentent à mesure que l'on s'approche de la paroi; mais il est à présumer qu'elles ne dépendent pas de la pente et du diamètre du tuyau, et il résulte même de la formule empirique de M. Darcy qu'elles sont indépendantes de la nature du tuyau; donc ε ne devra varier ni avec la pente, ni avec le diamètre, ni avec la nature des conduites expérimentées, mais seulement avec la distance du point dont on considère le mouvement au centre, c'est-

(*) Dans le travail auquel je fais allusion dans la note de la page 244, je n'ai plus besoin de coefficients de correction. Les formules que j'y donne pour les canaux et conduites sont entièrement rationnelles, débarrassées de toute notion empirique, et elles expliquent, comme par enchantement, tous les phénomènes observés par M. Bazin. Le présent mémoire, qui date de près de 2 ans, doit être regardé comme un premier pas dans une voie nouvelle, voie que j'ai entièrement déblayée depuis. (*Note du 30 août 1867.*)

à-dire avec r. Or c'est en effet ce que je vérifie de la manière la plus complète. Je trouve qu'en posant :

$$\varepsilon = K\sqrt{r},$$

la formule (3) satisfait à toutes les expériences de M. Darcy. Il en résulte que les lois de la répartition des vitesses dans un tuyau sont exprimées par la formule

$$K\sqrt{r}\,(V_0^2 - V^2) = \frac{\Pi i r^2}{4}$$

ou

$$V_0^2 - V^2 = \frac{\Pi}{4K}\, i r^{\frac{3}{2}},$$

le coefficient $\frac{\Pi}{4K}$ étant absolument constant pour un liquide déterminé et caractérisant ce liquide comme sa densité. Pour l'eau on a $\frac{\Pi}{4K} = 2\,640$, et la formule devient :

$$V_0^2 - V^2 = 2640\, i r^{\frac{3}{2}}. \qquad (4)$$

En différentiant les formules (3) et (4), on trouve par la première les lois du frottement dans un courant rigoureusement rectiligne, et par la seconde ces mêmes lois dans un tuyau. Elles donnent :

$$-\varepsilon V \frac{dV}{dr} = \frac{\Pi}{4} ri. \qquad (3')$$

$$-r^{\frac{1}{2}} V \frac{dV}{dr} = \frac{3}{4} \times 2640\, ri. \qquad (4')$$

Et comme ri est proportionnel au frottement de deux cylindres concentriques, on voit que :

1° Dans *un courant rigoureusement rectiligne le frottement entre deux filets contigus est proportionnel au produit de leur vitesse absolue par leur vitesse relative;*

2° *Que dans les tuyaux de conduites circulaires le frotte-*

ment entre deux cylindres concentriques est en outre proportionnel à la racine quarrée de leur rayon. Mais ce dernier facteur ne doit pas être considéré comme faisant partie intégrante de la loi élémentaire du frottement entre deux molécules liquides douées d'un mouvement quelconque. Cette dernière loi ne peut dépendre que des vitesses absolue et relative de ces molécules. Cela est évident. Le facteur $\sqrt{r}$ est, comme je l'ai dit, un coefficient de correction provenant de ce que le mouvement dans les tuyaux est sinueux et non droit et s'expliquant parce que la sinuosité augmente du centre à la circonférence. Ce coefficient est dû en partie à ce qu'au lieu d'estimer le frottement suivant sa direction véritable, c'est-à-dire suivant les surfaces d'égale vitesse sinueuses, on n'estime que ce que j'appellerai *la résistance au mouvement* parallèlement à l'axe du tuyau, et c'est cette résistance et non le frottement proprement dit qui dépend de r. C'est elle qui est proportionnelle au produit de la vitesse absolue par la vitesse relative et par la racine quarrée de r; si l'on veut, on peut encore dire que tout se passe dans les tuyaux comme si le mouvement était rigoureusement rectiligne et que le frottement fût proportionnel à ces trois quantités. Ce langage aurait la même valeur que celui qui consisterait à dire qu'au point de vue du débit qui se produit par un orifice en mince paroi tout se passe comme si le liquide s'échappait par filets parallèles et que la section de l'orifice fût réduite dans le rapport du coefficient de contraction à l'unité.

Les lois que je viens d'indiquer pour le frottement, ainsi que la formule (4) dont elles sont déduites, ont ceci de remarquable qu'elles sont indépendantes du diamètre des tuyaux. M. Darcy a déduit empiriquement de ses expériences que le frottement est proportionnel :

1° Au quarré de la vitesse relative;

2° Au quarré du diamètre des tuyaux.

Je démontre que la première de ces lois est mathémati-

quement impossible, et en appliquant ma formule (3) aux expériences mêmes de M. Darcy, je prouve que la seconde n'a pas lieu non plus, et la nouvelle loi que je substitue à celle-ci exclut de la question le diamètre des tuyaux, élément qui, *à priori*, y semble étranger, ou tout au moins accessoire. On comprendrait encore que ce que j'ai appelé plus haut *la résistance au mouvement* dépendît quelque peu de cet élément, à la condition que la sinuosité des filets représentée ici par une fonction de la variable r conservât le rôle principal; mais que cette dernière n'intervienne pas, et que le diamètre du tuyau intervienne seul et influe au même degré sur le frottement de tous les filets, qu'ils soient près de la paroi ou qu'ils en soient éloignés, c'est ce qui ne s'explique pas, et M. Darcy lui-même dit qu'il n'en peut pas donner « la raison philosophique. » Je regarde donc comme un fait heureux la disparition de cet élément. En l'introduisant d'une manière *très-secondaire* dans l'expression du coefficient ε, j'aurais peut-être pu faire cadrer, d'une manière en apparence plus heureuse encore, ma formule avec les expériences; mais je montre que les écarts relatifs entre les vitesses données par elle et les vitesses expérimentales, écarts qui dépassent rarement 0.02 ou 0.03, sont précisément dans les limites des erreurs que l'on reconnaît dans les expériences, et qu'ainsi il serait illusoire de chercher à les réduire; je conclus donc que dans la distribution des vitesses des conduites, le diamètre n'intervient pas, ou que son rôle est tout au moins négligeable. Je ne préjuge rien pour les cours d'eau où M. Bazin fait aussi jouer un grand rôle aux dimensions transversales de la section, il y aura sans doute à en tenir compte (*) ; mais je

(*) Dans le travail auquel je fais allusion, page 244 je montre que ces dimensions interviennent dans la loi de répartition des vitesses, mais que, malgré cela, la loi du frottement n'en dépend pas. (*Note du* 30 *août* 1867.)

crois que là aussi (et cette opinion est permise d'après mon mémoire) l'élément dominant dans la distribution des vitesses sera moins la grandeur de la section transversale que les distances qui séparent les courbes d'égale vitesse, distances comptées suivant leurs trajectoires orthogonales (*).

Après avoir établi la formule (4), je cherche les lois du frottement contre la paroi; je montre qu'on peut prévoir que ce frottement sera à peu près proportionnel au quarré de la vitesse à cette même paroi, c'est-à-dire que l'on doit avoir approximativement

$$W^2 = \alpha R i. \qquad (5)$$

R étant le rayon du tuyau et α un coefficient dépendant de sa nature; mais que ce n'est là toutefois qu'un premier de-

(*) M. Bazin a déjà, pour simplifier la représentation graphique de ses résultats, figuré les courbes d'égale vitesse dans son ouvrage; l'analyse indique clairement qu'on doit aller plus loin dans cette voie en étudiant aussi les trajectoires orthogonales de ces courbes et exprimant les vitesses par un système de coordonnées curvilignes résultant de la considération de ce double système de lignes. On aurait ainsi les vitesses, par une seule variable, dans tous les cas possibles, au lieu que jusqu'à présent on n'a pu les exprimer par une seule variable que dans les conduites et canaux circulaires et les canaux de grande section; dans les autres cas, on n'a même pas tenté des formules empiriques à cause de la nécessité d'introduire les deux coordonnées de chaque point. Or cette nécessité vient uniquement de ce que les coordonnées ordinaires ne constituent plus alors le système de coordonnées le plus naturel. Rien n'est plus aisé à comprendre. En effet, dans les conduites circulaires, si l'on voulait exprimer les vitesses en coordonnées rectangulaires x et y, on arriverait déjà à des formules très-complexes; la coordonnée naturelle à employer là est r, c'est-à-dire la distance entre les courbes concentriques au tuyau, c'est-à-dire entre *les courbes d'égale vitesse;* ce mémoire prouvera que la distance entre les courbes d'égale vitesse est partout la coordonnée naturelle, et la seule qui puisse faire découvrir les lois générales de l'écoulement des liquides.

gré d'approximation et qu'on a plus exactement

$$W^2 = Ri(\alpha + \beta\sqrt{R}). \tag{5'}$$

Qu'on adopte la valeur (5) ou la valeur plus approchée (5'), on arrive pour la vitesse moyenne à une expression de la même forme, savoir :

$$u^2 = Ri(m + n\sqrt{R}), \tag{6}$$

m et n étant deux coefficients qui dépendent tous deux de la nature de la paroi si l'on adopte pour W la valeur (5'), et dont l'un, m, change seul avec la paroi et l'autre seulement avec la nature du liquide si l'on prend la valeur (5) ; mais il faut adopter (5') pour avoir la vitesse moyenne suffisamment exacte. Je donne les valeurs de m et de n dans le cas de la fonte neuve et de la fonte avec dépôts, et j'obtiens :

Pour la fonte neuve :

$$\left(\frac{U}{36.4}\right)^2 = Ri(1 + \sqrt{R}). \tag{7}$$

Pour la fonte avec dépôts :

$$\left(\frac{U}{20.5}\right)^2 = Ri(1 + 3\sqrt{R}). \tag{8}$$

Aucune de ces formules n'est admise sans avoir été comparée à l'expérience, et elles subissent toutes cette épreuve de la manière la plus satisfaisante. Elles cadrent avec les formules empiriques de M. Darcy dans les limites des expériences, mais s'en écartent quand on sort de ces limites, et alors j'estime qu'elles doivent mériter plus de confiance, n'étant pas purement empiriques et représentant des lois qui, si elles ne sont pas les lois naturelles, en sont une approximation ; tandis que la loi de la proportionnalité du frottement au quarré de la vitesse relative déduite des

formules empiriques de M. Darcy, est *mathématiquement* impossible; elle ne peut donc à aucun degré représenter ce qui se passe dans la nature. Ces formules n'en sont pas moins une traduction très-exacte des expériences qu'elles doivent représenter. Mais comme toutes les formules empiriques, elles ne peuvent plus inspirer de confiance quand on a franchi le cercle d'expériences qui les a fournies.

Je passe maintenant à l'application.

Comme le fait observer M. Darcy, tous les tuyaux se recouvrent tôt ou tard de dépôts. Il faut donc, quand on a un système de conduites à établir, opérer comme si ce phénomène était déjà produit et employer la formule relative aux tuyaux recouverts de dépôts, c'est-à-dire la formule (8). Elle peut s'écrire :

$$u = \mu \sqrt{i}. \qquad (9)$$

En posant

$$\mu = 20.5 \sqrt{R(1 + 3\sqrt{R})},$$

μ ne dépend que du rayon R du tuyau. On peut donc en calculer les valeurs à l'avance. Je donne, à la suite de ce chapitre, une table à simple entrée qui permet de résoudre très-rapidement tous les problèmes relatifs aux conduites d'eau. Je vais indiquer la composition et l'usage de cette table. Elle comprend de centimètre en centimètre tous les tuyaux de 1 à 50 centimètres de diamètre et de 2 en 2 centimètres tous ceux de 50 centimètres à 1 mètre de diamètre. (Voir p. 254).

Dans les trois premières colonnes on donne le diamètre, le rayon et la section des tuyaux; dans la quatrième colonne la valeur de μ; dans la cinquième la valeur du produit $\pi R^2 \times \mu$ de la section par le coefficient μ.

Ceci posé, tous les problèmes relatifs aux conduites dépendent de la solution de l'équation (9) et de la suivante

$$\pi R^2 u = Q; \qquad (10)$$

Q étant le débit de la conduite. Sur les quatre quantités

$$u, \ Q, \ R, \ i,$$

qui entrent dans ces formules, on peut s'en donner deux au hasard et il s'agit de trouver les deux autres, ce qui donne lieu à six problèmes dont nous allons indiquer la solution pratique au moyen de la table.

Premier problème. — Étant donné le débit Q et la pente i d'une conduite, trouver son rayon R et sa vitesse moyenne u.

Ce problème a fait naître plusieurs tables; il y en a une de M. Fourneyron; il y en a une à double entrée de M. l'inspecteur général Mary; on peut se servir des tables à double entrée de M. Darcy (en remarquant toutefois qu'elles ne s'appliquent qu'à la fonte neuve). Or, il n'est pas besoin d'avoir une table spéciale pour ce problème.

La cinquième colonne de ma table à simple entrée le résout immédiatement. On déduit en effet des formules (9) et (10) :

$$\pi R^2 \times \mu \sqrt{i} = Q.$$

De là cette règle : divisez Q par $\sqrt{i}$, vous aurez $\pi R^2 \times \mu$. Cherchez dans la table la valeur correspondante de R; enfin prenez aussi la valeur correspondante de πR^2 par laquelle vous diviserez Q, et vous aurez u.

Deuxième problème. — On donne Q et u, trouver R et i.

Divisez Q par u, vous aurez πR^2. Cherchez dans la table les valeurs correspondantes de R et de μ, et le quotient de u par μ vous donne $\sqrt{i}$ et une table des racines et des carrés vous donne i.

Troisième problème. — On donne Q et R, trouver u et i.

Ayant R, la table donne πR^2 et μ, divisez Q par πR^2, vous aurez u; divisez u par μ, vous aurez $\sqrt{i}$.

Quatrième problème. — On donne la vitesse moyenne u

et la pente i d'une conduite, trouver son diamètre et son débit.

Divisez la vitesse par la racine quarrée de la pente, vous aurez d'après la formule (9) la valeur μ. Cherchez dans la table la valeur correspondante du rayon R et de la section πR^2; enfin multipliez cette section par la vitesse donnée u, vous aurez le débit Q.

Cinquième problème. — On donne u et R, trouver i et Q.

Ayant R, la table vous donne μ; divisant u par μ, vous aurez $\sqrt{i}$ et par suite i. Enfin la table vous donne πR^2 qui, multiplié par u, vous donne le débit.

Sixième problème. — On donne R et i, trouver u et Q.

Ayant R, vous avez μ, qui, multiplié par $\sqrt{i}$, donne u et le reste comme ci-dessus.

La table qui suit a l'avantage d'être courte et de résoudre indistinctement tous les problèmes relatifs aux conduites d'eau. Elle évite l'emploi d'une table spéciale pour le premier problème; elle évite l'emploi des tables à double entrée qui sont toujours volumineuses et longues à feuilleter.

Table à simple entrée pour résoudre les six problèmes que soulèvent les tuyaux de conduite simples.

DIAMÈTRE D	RAYON R	SECTION πR^2	$20.5\sqrt{R(1+3\sqrt{R})}=\mu$	$\mu \times \pi R^2$
1	2	3	4	5
0.01	0.005	0.000078	1.578	0.00012308
0.02	0.01	0.000314	2.337	0.00073382
0.027	0.0135	0.00057255	2.747	0.00157279
0.03	0.015	0.000707	2.932	0.00207292
0.04	0.02	0.001257	3.444	0.00432911
0.05	0.025	0.001953	3.915	0.00768514
0.054	0.027	0.00229021	4.100	0.00938986
0.06	0.03	0.002827	4.428	0.01251795
0.07	0.035	0.003848	4.776	0.01837805
0.08	0.04	0.005026	5.166	0.02596431
0.081	0.0405	0.005153	5.207	0.02683167
0.09	0.045	0.006361	5.555	0.03533535
0.10	0.05	0.007854	5.804	0.04557562
0.108	0.054	0.00916090	6.191	0.05671513
0.11	0.055	0.009503	6.252	0.05941276
0.12	0.06	0.011309	6.621	0.07487689
0.13	0.065	0.013273	6.929	0.09197862
0.135	0.0675	0.014313	7.052	0.10093527
0.14	0.07	0.015393	7.257	0.11170700
0.15	0.075	0.017671	7.564	0.13366344
0.16	0.08	0.020116	7.872	0.15827443
0.162	0.081	0.020612	7.913	0.16310276
0.17	0.085	0.022698	8.159	0.18519298
0.18	0.09	0.025446	8.466	0.21502584
0.19	0.095	0.028352	8.753	0.24816505
0.20	0.10	0.031415	9.040	0.28399160
0.21	0.105	0.034636	9.307	0.32235725
0.216	0.108	0.036643	9.471	0.34704584
0.22	0.11	0.038013	9.594	0.36469672
0.23	0.115	0.041547	9.860	0.40965242
0.24	0.12	0.045238	10.127	0.45813593
0.25	0.125	0.049087	10.399	0.51045571
0.26	0.13	0.053093	10.660	0.56597138
0.27	0.135	0.057255	10.906	0.62442303
0.28	0.14	0.061573	11.193	0.63985521
0.29	0.145	0.066052	11.418	0.75418173
0.30	0.15	0.070685	11.664	0.8214698
0.31	0.155	0.075476	11.910	0.8989192
0.32	0.16	0.080424	12.156	0.97763414
0.325	0.1625	0.082957	12.279	1.01862900
0.33	0.165	0.085529	12.382	1.05902008
0.34	0.17	0.090792	12.628	1.14652137
0.35	0.175	0.096211	12.874	1.23852042
0.36	0.18	0.101787	13.099	1.33330791
0.37	0.185	0.107521	13.345	1.43486774
0.38	0.19	0.113411	13.550	1.53671905
0.39	0.195	0.119459	13.796	1.64806636
0.40	0.20	0.125663	14.022	1.76204658
0.41	0.205	0.132025	14.227	1.87831967
0.42	0.21	0.138544	14.452	2.00223789
0.43	0.215	0.145220	14.678	2.13153916
0.44	0.22	0.152052	14.903	2.26603096
0.45	0.225	0.159045	15.049	2.39346820

Suite de la table précédente.

DIAMÈTRE D 1	RAYON R 2	SECTION πR^2 3	$20.5\sqrt{R(1+3\sqrt{R})}=\mu$ 4	$\mu \times \pi R^2$ 5
0.46	0.23	0.166190	15.334	2.54835746
0.47	0.235	0.173494	15.559	2.69939314
0.48	0.24	0.180955	15.764	2.85257462
0.49	0.245	0.188574	15.969	3.01123721
0.50	0.25	0.196345	16.195	3.17980727
0.52	0.26	0.213371	16.625	3.53066889
0.54	0.27	0.229021	17.035	3.90137273
0.55	0.275	0.237582	17.240	4.09591368
0.56	0.28	0.246301	17.445	4.29672094
0.58	0.29	0.264208	17.835	4.71214968
0.60	0.30	0.232743	18.245	5.15855603
0.62	0.31	0.301907	18.634	5.62573504
0.64	0.32	0.321699	19.044	6.12643575
0.65	0.325	0.331830	19.331	6.51460573
0.66	0.33	0.342118	19.413	6.64163673
0.68	0.34	0.363168	19.803	7.19181590
0.70	0.35	0.384845	20.192	7.77079024
0.72	0.36	0.407150	20.561	8.37141115
0.74	0.37	0.430084	20.951	9.01068988
0.75	0.375	0.441786	21.135	9.33714711
0.76	0.38	0.453645	21.320	9.66171140
0.78	0.39	0.477836	21.618	10.11486700
0.80	0.40	0.502654	21.976	11.04632430
0.82	0.41	0.528101	22.427	11.84372112
0.84	0.42	0.554177	22.775	12.62143117
0.85	0.425	0.567450	22.960	13.0286520
0.86	0.43	0.580880	23.144	13.4438867
0.88	0.44	0.608211	23.493	14.30870102
0.90	0.45	0.636172	23.802	15.14216594
0.92	0.46	0.664761	24.210	16.0938638
0.94	0.47	0.693978	24.559	17.0434056
0.95	0.475	0.708821	24.723	17.52418158
0.96	0.48	0.723823	24.907	18.02825946
0.98	0.49	0.754296	25.256	19.05049977
1.00	0.50	0.785397	25.604	20.24930478

CHAPITRE II.

PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES D'UN COURANT LIQUIDE A FILETS RECTILIGNES ET PARALLÈLES DE FORME TRANSVERSALE QUELCONQUE.

Équilibre d'une portion quelconque du fluide. — Considérons un courant à filets rectilignes et parallèles dont la section transversale soit quelconque, finie ou indéfinie, curviligne ou polygonale. Toutes les molécules décrivant des droites parallèles, l'équation de continuité veut que cha-

cune d'elles se meuve avec une vitesse constante. Donc, en vertu du théorème de d'Alembert, les forces extérieures qui agissent sur une portion quelconque du fluide se font équilibre, ce qui exige notamment que la somme de leurs projections sur un axe quelconque et la somme de leurs moments par rapport à un axe quelconque soient nulles.

Ces forces sont :

1° La pesanteur qui agit sur toutes les molécules de la portion fluide considérée;

2° Les pressions normales et le frottement qui agissent à sa surface seulement.

On peut appliquer les conditions d'équilibre que je viens d'indiquer à une figure quelconque prise dans l'intérieur du liquide. Ordinairement, on ne les exprime que pour le parallélipipède élémentaire. Mais M. Lamé, dans ses admirables leçons sur l'élasticité des corps solides, a fait ressortir toute l'utilité qu'il y a à considérer aussi le tétraèdre élémentaire; et les procédés si simples et si féconds indiqués dans ce remarquable ouvrage sont de tous points applicables aux liquides.

Je me servirai aussi du prisme triangulaire qui n'est, à vrai dire, qu'un cas particulier du tétraèdre, mais dont la considération me fournira des données précieuses sur la forme nécessaire de la fonction du frottement.

Frottement sur un élément plan parallèle au fil de l'eau. — Quand un liquide est en repos, il ne transmet que des pressions normales; dès qu'il se met en mouvement, un élément superficiel pris au hasard dans son sein, subira en général, outre la pression normale, une action tangentielle qu'on appelle le *frottement*. Quelle est la grandeur, quelle est la direction de cette force nouvelle? Quand l'élément plan considéré est quelconque, on n'a, à cet égard, aucune donnée immédiate; mais quand il est parallèle au fil de l'eau, on sait que le frottement est dirigé en sens contraire de la vitesse. On sait de plus que sa grandeur est indépen-

dante de la pression. Elle ne peut donc dépendre que de la vitesse absolue d'une molécule prise dans l'élément plan considéré et de la vitesse relative entre deux molécules prises sur la normale à cet élément près de chacune de ses deux faces. Si donc on appelle V la vitesse du fluide, dV l'accroissement que prend cette vitesse pour l'accroissement dn de la normale à l'élément plan considéré et T la valeur du frottement rapporté à l'unité de surface, on aura :

$$T = \varphi\left(V, \frac{dV}{dn}\right), \qquad (A)$$

φ étant une fonction inconnue. Pour acquérir quelques notions sur la manière dont cette fonction doit se comporter, faisons pivoter l'élément plan autour de la ligne qui représente la vitesse comme autour d'une charnière, et voyons de quelle manière le frottement devra nécessairement se modifier. A cet effet, prenons trois axes de coordonnées rectangulaires dont l'un, l'axe des x, soit parallèle au courant, l'axe des y et celui des z étant rectangulaires entre eux, *mais dirigés d'ailleurs d'une manière quelconque dans la section transversale.* Considérons un prisme triangulaire dont les trois arêtes soient parallèles à l'axe des x ou au courant et aient une longueur dx, dont deux faces latérales soient parallèles aux y et aux z, la troisième ayant une inclinaison quelconque sur les deux premières.

Exprimons que la somme des projections, sur l'axe des x, de toutes les forces qui agissent sur ce prisme, est nulle. Nous avons d'abord les frottements sur les trois faces latérales qui se projettent en vraie grandeur et donnent pour somme :

$$T\omega - T_1\omega_1 - T_2\omega_2,$$

T, T_1 et T_2 étant les valeurs respectives de ces forces rapportées à l'unité de surface pour la face inclinée, et les faces parallèles aux y et aux z; ω, ω_1 et ω_2 les aires de ces

mêmes faces. D'un autre côté, on voit facilement qu'il n'y a pas lieu de tenir compte des autres forces. D'abord, les pressions sur les faces latérales ont des projections nulles; il en est de même du frottement, quel qu'il soit, qui s'exerce sur les bases du prisme (nous verrons que ce frottement n'est pas nul, bien que ces bases soient normales au fil de l'eau).

Quant aux pressions qui s'exercent sur ces bases, leur différence est infiniment petite du troisième ordre et doit être négligée en présence des forces du frottement qui sont infiniment petites du deuxième ordre; pour la même raison le poids du prisme n'interviendra pas. L'équation d'équilibre se réduit donc à :

$$T\omega - T_1\omega_1 - T_2\omega_2 = 0,$$

Mais on voit facilement que les aires ω_1 et ω_2 sont les projections sur les plans coordonnés xy et xz de ω. Si donc on appelle β et γ les cosinus des angles que la normale à la face inclinée ω fait avec les y et les z, on aura :

$$\omega_1 = \gamma\omega, \quad \omega_2 = \beta\omega.$$

et, par suite, l'équation ci-dessus deviendra, en divisant par ω :

$$T = \gamma T_1 + \beta T_2. \tag{1}$$

Telle est la relation qui donne le frottement T sur un élément plan quelconque parallèle au fil de l'eau, quand on connaît les frottements sur deux de ces éléments perpendiculaires entre eux.

Forme nécessaire de la fonction du frottement. — Remplaçons maintenant T, T_1 et T_2 par leurs valeurs déduites de la relation (A), savoir :

$$T = \varphi\left(V, \frac{dV}{dn}\right), \quad T_1 = \varphi\left(V, \frac{dV}{dz}\right), \quad T_2 = \varphi\left(V, \frac{dV}{dy}\right).$$

Observons, en outre, que les règles ordinaires du calcul différentiel donnent :

$$\frac{dV}{dn}=\frac{dV}{dy}\frac{dy}{dn}+\frac{dV}{dz}\frac{dz}{dn}=\frac{dV}{dy}\beta+\frac{dV}{dz}\gamma.$$

Ce qui mettra la valeur de T sous la forme :

$$T=\varphi\left(V,\frac{dV}{dy}\beta+\frac{dV}{dz}\gamma\right).$$

Par la substitution des expressions fournies pour T, T_1 et T_2, l'équation (1) devient :

$$\varphi\left(V,\frac{dV}{dy}\beta+\frac{dV}{dz}\gamma\right)=\beta\varphi\left(V,\frac{dV}{dy}\right)+\gamma\varphi\left(V,\frac{dV}{dz}\right), \quad (2)$$

Relation qui doit subsister pour toutes les valeurs qu'il est possible d'attribuer aux cosinus β et γ. Or, pour qu'il puisse en être ainsi, la fonction φ doit nécessairement avoir la forme suivante :

$$\varphi\left(V,\frac{dV}{dn}\right)=A\frac{dV}{dn}=T, \quad (A')$$

A étant une fonction quelconque de la vitesse V.

Impossibilité de la loi du frottement donnée par M. Darcy. — Dans le cas particulier où l'on supposerait que cette fonction se réduit à une constante, on arriverait à l'hypothèse de Navier, savoir : la proportionnalité du frottement à la vitesse relative. Mais en aucun cas, on ne peut admettre que le frottement soit proportionnel au quarré de la vitesse relative, comme M. Darcy l'a déduit de ses expériences. Cette hypothèse, en effet, ne permettrait pas de satisfaire à la relation (2), laquelle est nécessaire quelque idée qu'on se fasse du frottement.

De tout ce qui précède, il est déjà permis de conclure que la fonction susceptible de représenter le frottement n'est pas tout-à-fait arbitraire et que le champ des hypothèses est beaucoup plus restreint qu'on n'est porté à le supposer au premier abord.

Frottement ou action tangentielle sur un élément plan perpendiculaire au fil de l'eau. — Considérons maintenant l'équilibre d'un parallélipipède élémentaire dont les arêtes dx, dy et dz soient parallèles aux trois axes coordonnés, et prenons, avec M. Lamé, la somme des moments de toutes les forces qui agissent sur ce parallélipipède par rapport à une droite passant par son centre et parallèle à l'un des axes, par exemple à l'axe des y. On voit aisément que les pressions normales, ainsi que le poids du parallélipipède, donnent des moments nuls, comme rencontrant l'axe des moments. Il en est de même du frottement sur les deux faces perpendiculaires à cet axe; restent les faces parallèles à cet axe. Les frottements sur les deux faces parallèles au plan de xy sont :

$$T_1\, dx\, dy$$

et

$$\left(T_1 + \frac{dT_1}{dz}\, dz\right) dx\, dy.$$

La somme de leurs moments, en négligeant les infiniment petits du quatrième ordre par rapport à ceux du troisième, est :

$$T_1\; dx\; dy\; dz.$$

Il faut que ce moment soit équilibré; il ne peut l'être que s'il y a frottement ou action tangentielle sur les faces parallèles aux yz, c'est-à-dire *perpendiculaires au courant*. Soit T' la composante de cette action parallèle à l'axe de z; on verra, comme ci-dessus, que cette composante donnera sur les deux faces parallèles aux yz une somme des mo-

ments égale à :

$$T' \, dx \, dy \, dz.$$

Donc on devra avoir :

$$T' = T_1 \text{ (*)}.$$

On verrait de même, en prenant les moments autour de l'axe des z, qu'il existe une composante de ce frottement parallèle à l'axe des y et égale à T_2.

Ainsi, *il est prouvé que le frottement ne peut exister parallèlement au courant, sans naître aussi dans une direction perpendiculaire; et l'existence de cette force tangentielle entre deux molécules consécutives d'un même filet liquide, molécules qui ont pourtant même vitesse, suffirait à faire présumer que le frottement des liquides ne doit pas dépendre seulement de la vitesse relative de leurs parties, mais aussi de leur vitesse absolue.*

Construction géométrique pour obtenir le frottement sur un élément plan parallèle ou perpendiculaire au fil de l'eau. — Nous désignerons par ϖ le frottement sur un élément plan perpendiculaire au fil de l'eau. Il résulte de ce qui précède qu'il est en grandeur la résultante des frottements T_1 et T_2, et que pour l'obtenir en grandeur et en direction, il suffit de porter le frottement T_1 relatif à l'élément plan parallèle au plan des xy, sur une normale à ce plan ; faire la même opération pour le frottement T_2 relatif à l'élément plan parallèle aux xz et prendre la résultante de ces deux forces. Cette construction est indiquée sur la figure 1, Pl. 134.

(*) Il y a lieu d'insister sur cette propriété qui nous servira encore plus tard et qui peut s'énoncer ainsi : quand on a deux éléments plans perpendiculaires entre eux, quelle que soit d'ailleurs leur orientation dans le liquide, les composantes de leurs frottements perpendiculaires à leur commune intersection sont égales entre elles.

Mais les plans des xy et des xz étant arbitraires, on aurait pu faire la même construction pour deux autres éléments plans quelconques perpendiculaires entre eux; on aurait eu ainsi des forces telles que T_1' et T_1' dont la résultante eût également été ϖ. Donc chacune de ces forces est la projection de ϖ sur sa direction. De là, cette proposition :

Si en un point O on porte sur la normale à chaque élément plan parallèle au courant, une longueur proportionnelle au frottement que subit cet élément plan, le lieu des extrémités des lignes ainsi obtenues est une circonférence passant au point donné : le diamètre aboutissant en ce point représente en grandeur et en direction le frottement perpendiculaire au courant.

Cette circonférence peut se construire quand on connaît soit son centre, soit deux de ses points; c'est-à-dire qu'on trouve le frottement parallèle et perpendiculaire au courant, pourvu qu'on connaisse ce dernier, ou bien le premier dans deux directions particulières.

Cylindres à frottement maximum. — Le frottement sur un élément quelconque parallèle au fil de l'eau, est le rayon vecteur de la circonférence normal à cet élément; donc l'élément tangent à la circonférence est celui qui subit le frottement maximum, et ce frottement est précisément représenté par le diamètre du cercle; il est par conséquent égal au frottement ϖ qui s'exerce normalement au courant.

En chaque point d'une section transversale passe ainsi un élément plan de direction déterminée qui correspond au frottement maximum en ce point : l'ensemble de ces éléments formera une famille de courbes qui couvriront toute la section, et comme tout est identique dans toutes les sections, on pourra subdiviser l'espace qu'occupe le liquide par une infinité de cylindres dont chacun jouira de la propriété de subir en un quelconque de ses points un frotte-

ment plus grand que tous les autres éléments plans parallèles au fil de l'eau passant en ce point.

Cylindres à frottement nul. — Si l'on prend au contraire au point O l'élément plan normal à la circonférence, le rayon vecteur qui lui est perpendiculaire, c'est-à-dire le frottement qu'il subit, est nul. Tous les éléments analogues donneront lieu à une nouvelle famille de cylindres caractérisés parce qu'ils ne subissent aucune action tangentielle : ils sont pressés normalement, en quelque sorte, comme si le liquide était d'une fluidité parfaite.

On voit que les deux familles de cylindres, l'une à frottement maximum, l'autre à frottement nul, se coupent partout à angle droit.

Position des deux familles de cylindres. — Examinons maintenant quelle est la position qu'occupent ces deux familles de cylindres dans la masse fluide. D'après l'expression (A') du frottement, les cylindres à frottement nul sont donnés par l'équation

$$\frac{dV}{dn} = 0,$$

qui signifie en langage ordinaire que normalement à ces cylindres la vitesse est constante, autrement dit que ces cylindres et ceux représentés par l'équation :

$$V = \text{constante}$$

se coupent à angle droit. Donc, puisque les premiers sont les cylindres à frottement nul, les derniers sont les cylindres à frottement maximum.

Ainsi, *les cylindres à frottement maximum ont pour directrices les courbes d'égale vitesse prises dans la section transversale du courant, et les cylindres à frottement nul ont pour directrices les trajectoires orthogonales de ces courbes.*

Dans les tuyaux de conduite circulaires, les premiers sont concentriques au tuyau et les seconds sont formés par les méridiens. Mais on voit que l'existence de ces diverses familles de surfaces, qui a été jusqu'ici admise gratuitement dans les conduites circulaires, se trouve démontrée rigoureusement non seulement pour ces conduites, mais pour toute espèce de conduite rectiligne, quel que soit le contour mouillé.

Frottement sur un élément plan quelconque. — Pour obtenir le frottement sur un élément plan quelconque, il suffira d'exprimer l'équilibre du tétraèdre. Je ne reproduirai pas les raisonnements donnés à ce sujet dans l'ouvrage de M. Lamé sur l'élasticité des corps solides. Je me bornerai à dire qu'ils s'appliquent aux liquides et à en énoncer les principaux résultats.

Si l'on prend tous les éléments plans possibles autour d'un point, qu'on représente par une droite correspondante à chacun d'eux la grandeur et la direction de la force totale (résultant de la pression et du frottement) qu'il subit, le lieu des extrémités de toutes ces lignes sera un ellipsoïde.

Soit :

$$\frac{x^2}{F^2} + \frac{y^2}{F_1^2} + \frac{z^2}{F_2^2} = 1 \qquad (\alpha)$$

l'équation de cet ellipsoïde rapporté à ses plans principaux.

Soit :

$$\frac{x^2}{F} + \frac{y^2}{F_1} + \frac{z^2}{F_2} = \pm K \qquad (\beta)$$

une autre surface du second degré ayant mêmes plans principaux que la première et pour axes les racines quarrées des axes de celle-ci :

La direction de la force totale correspondant à un élément quelconque est conjuguée à cet élément plan dans la

surface (β) *et l'extrémité de cette force est le point où sa direction perce la surface* (α).

Système triplement orthogonal des surfaces à frottement nul. — De là résulte que les éléments plans dirigés suivant les plans principaux communs aux surfaces α et β, ne subissent que des pressions normales ; l'ensemble de ces éléments particuliers pour tous les points de l'espace forme trois familles de surfaces se coupant partout à angle droit et jouissant toutes de la propriété de ne subir aucune action tangentielle.

Ces propriétés sont générales ; elles existent indépendamment de toute hypothèse sur le frottement et ont lieu non-seulement pour un courant à filets parallèles, mais pour tout liquide quel qu'en soit le mouvement.

Parmi les trois familles de surfaces dont nous venons de parler, il en est une que nous connaissons déjà : c'est la famille des cylindres coupant à angle droit ceux d'égale vitesse. Donc les autres familles devraient être :

1° Les cylindres d'égale vitesse eux-mêmes ;

2° Les sections transversales du courant.

Mais nous avons vu que suivant ces cylindres et suivant leurs sections droites se produit précisément le maximum du frottement, celui que nous avons désigné par la lettre ϖ. Et cette quantité ϖ ne peut être nulle que si tous les filets se meuvent avec une égale vitesse, cas qui ne se présente jamais dans les liquides naturels et qui n'offre d'ailleurs aucun intérêt ; ou bien si dans l'équation (A') le coefficient A est nul, c'est-à-dire si le liquide n'est pas sujet au frottement.

Équidistance des courbes d'égale vitesse. — Ainsi, il semble que les fluides parfaits puissent seuls se mouvoir suivant des lignes droites parallèles et avec des vitesses variables d'une ligne à l'autre, puisque dans les fluides visqueux l'hypothèse d'un pareil mouvement conduirait à la négation du système triple de surfaces à frottement nul

dont l'existence est prouvée *à priori* pour tous les courants. Mais cette conclusion serait inexacte ; car je vais montrer qu'il est un cas où le système de surfaces dont il s'agit peut exister; c'est quand les cylindres normaux à ceux d'égale vitesse sont des plans, ou, ce qui revient au même, quand ces derniers sont équidistants; d'où il faudra déduire que le mouvement par filets parallèles n'est pas impossible; qu'il peut se produire et de plus que, quand il a lieu, une de ses propriétés générales les plus intéressantes est de *n'admettre que des courbes d'égale vitesse équidistantes, c'est-à-dire ayant même développée.*

Il me reste seulement à montrer pour justifier cette conclusion que quand les cylindres normaux aux surfaces d'égale vitesse et exempts de frottement sont des plans, on peut trouver les deux autres familles de surfaces sans frottement qui les coupent à angle droit.

D'abord on sait qu'une famille de plans admet une infinité de systèmes orthogonaux.

Pour obtenir un quelconque de ces systèmes, il suffit, dans un des plans, de tracer une série quelconque de courbes et leurs trajectoires orthogonales; si l'on fait rouler ce plan sur la surface développable, enveloppe de la famille à laquelle il appartient, les deux systèmes de courbes engendreront les surfaces cherchées. Et je dis que *parmi tous les systèmes des surfaces orthogonales ainsi produites, il s'en trouvera un dont les surfaces jouiront toutes de la propriété voulue d'être pressée normalement.*

Cette proposition résulte de la considération des surfaces du second degré (α) et (β) dont il a été question plus haut.

En un point quelconque M, ces surfaces admettent pour un de leurs plans principaux le plan MN normal à la courbe d'égale vitesse vv' passant en ce point (*fig.* 2, Pl. 134). On déduit de là que les forces totales (résultante de la pression et du frottement) agissant sur les divers éléments superficiels perpendiculaires au plan MN sont toutes situées dans ce plan.

Le lieu des extrémités de ces forces est donc la section principale faite par MN dans l'ellipsoïde (α). Et si l'on considère en particulier les deux éléments plans dirigés suivant les axes de cette section principale, ces éléments ne subissent qu'une pression normale : ce sont ces deux éléments qui, tracés de proche en proche dans toute l'étendue du plan MN, fournissent les deux systèmes de trajectoires orthogonales génératrices des deux familles de surfaces conjuguées au plan MN, que nous cherchons. Mais pour que ces surfaces rencontrent réellement tous les plans MN à angle droit, il faut que leurs sections, par tous ces plans, soient des courbes identiques. Et comme ces courbes sont, par définition, les enveloppes des axes de la section principale que nous avons considérée dans l'ellipsoïde (α), il faut que la direction de ces axes ne varie que d'un point à un autre du plan MN, mais non de l'un à l'autre de ces plans, ou, si l'on veut, qu'elle reste la même tout le long d'une même courbe d'égale vitesse vv'. Pour montrer que cette condition se trouve remplie, traçons dans l'un quelconque des plans MN, deux axes rectangulaires ox, oy, dont l'un ox soit dirigé suivant le courant et projetons sur ces axes les forces qui agissent sur un prisme aMc dont les arêtes soient normales à ce plan et dont les trois faces latérales soient : les deux premières Ma et Mc parallèles aux axes, et la troisième inclinée (*fig.* 3, Pl. 134).

Les pressions normales sur les bases du prisme ont des projections nulles. Ces bases ne supportent d'ailleurs que des frottements infiniment petits du troisième ordre, comme étant infiniment voisins du plan à frottement nul MN. De plus, comme nous l'avons fait remarquer plus haut, les forces agissant sur daM, Mc et ac sont toutes dans ce plan. Les frottements sur chacune des deux faces perpendiculaires entre elles, Ma et Mc sont toutes deux égales à ϖ (*).

(*) Voir à ce sujet la note de la p. 261.

Soient donc p et p_1 les pressions normales sur les faces aM et Mc, X et Y les composantes de la force totale agissant sur ac rapportées à l'unité de surface; α et β les cosinus des angles que ac forme avec les axes : les équations d'équilibre du prisme sont :

$$X = p\beta + \varpi\alpha, \qquad Y = p\alpha + \varpi\beta.$$

L'ellipse décrite par l'extrémité de la force totale agissant sur l'élément ac, rapportée aux axes Mx' et My', a pour coordonnées X et Y, et son équation résulte de l'élimination des variables α et β entre les équations précédentes, et

$$\alpha^2 + \beta^2 = 1.$$

Le résultat de l'élimination donne :

$$(\varpi^2 + p_1^2)X^2 + (\varpi^2 + p^2)Y^2 - 2\varpi(p + p_1)XY = (\varpi^2 - pp_1)^2.$$

Si l'on désigne par θ l'inclinaison de l'un des axes de cette ellipse sur les x, on aura :

$$\text{tang}\, 2\theta = \frac{2\varpi}{p - p_1}.$$

Il s'agit de faire voir que l'angle θ reste le même tout le long d'une surface d'égale vitesse. Or d'abord ϖ ne change pas le long d'une pareille surface, car le frottement ϖ ne dépend que des vitesses absolue et relative V et $\frac{dV}{dn}$. Or V reste constant d'après la définition des surfaces d'égale vitesse et $\frac{dV}{dn}$ aussi parce qu'elles sont équidistantes.

Quant à la différence $p - p_1$, elle suggère les observations suivantes qui trouvent naturellement place ici.

Quand un liquide est parfaitement fluide, il ne transmet que des pressions égales dans tous les sens, qu'il soit en

repos ou en mouvement. Il n'en est plus ainsi des liquides naturels.

A l'état de repos ceux-ci ne transmettent aussi que des pressions normales, partant, des pressions égales dans tous les sens; mais à l'état de mouvement, ils produisent des actions tangentielles, et dès lors l'égalité de pression ne peut plus exister; la pression varie non-seulement d'un point à un autre du liquide, mais au même point avec la direction dans laquelle elle s'exerce. S'il en était autrement, si les pressions pouvaient être les mêmes dans toutes les directions, elles le seraient en particulier en chaque point suivant les axes de l'ellipsoïde (α). Ces axes seraient donc égaux entre eux; l'ellipsoïde se réduirait à une sphère ainsi que la surface (β). Il en résulterait que les forces totales agissant sur chaque élément plan seraient normales à cet élément, quelle que soit la direction, c'est-à-dire que le frottement n'existerait pas. Ainsi, l'égalité de pression en tous sens est incompatible avec ce qu'on appelle *la viscosité*.

C'est pourquoi j'ai pris des valeurs différentes p et p_1 pour les pressions sur les éléments plans Ma et Mc passant au même point; on voit que la différence $p - p_1$ est nulle quand le frottement n'existe pas, ou, le frottement existant, quand le liquide est en repos; c'est donc une quantité de même ordre que le frottement, qui est due à la même cause, à la *non-fluidité* des liquides; elle dépend, comme le frottement, des vitesses absolue et relative en chaque point, et, par suite, elle doit, comme lui, rester constante le long d'une surface à vitesse constante. Par conséquent tang. 2θ ne varie pas le long de ces surfaces : ce qui suffit, comme nous l'avons vu, pour montrer que les deux familles de courbes orthogonales données par l'équation

$$\text{tang } 2\theta = \frac{2\mathfrak{T}}{p - p_1}$$

engendrent des surfaces qui coupent à angle droit tous les plans MN et constituent avec eux le système triplement orthogonal sans frottement que nous cherchons (*).

En résumé, dans tout liquide en mouvement il existe trois familles de surfaces orthogonales ne recevant que des pressions normales. Pour que ces surfaces puissent exister dans un courant à filets rectilignes et parallèles, il faut que les courbes d'égale vitesse soient équidistantes.

Donc, dans tout courant à filets parallèles, les courbes ou, si l'on veut, les cylindres d'égale vitesse sont équidistants.

Quand cette condition est remplie, le système de surfaces orthogonales peut se trouver, ce qui montre, non pas que le mouvement à filets parallèles se produira nécessairement, mais qu'il n'est pas impossible, qu'il peut se produire; en d'autres termes, l'équidistance des courbes d'égale vitesse est une propriété générale, mais non caractéristique, d'un courant à filets parallèles.

Cette propriété est très-remarquable et elle se vérifie très-bien sur les expériences connues jusqu'ici. Je ne parle pas des tuyaux circulaires où elle est évidente; mais M. Bazin a fait des expériences comparatives sur des tuyaux rectangulaires fermés et la moitié de ces tuyaux découverts. Dans les premiers, on voit que les vitesses égales se répartissent très-sensiblement sur des rectangles équidistants des parois

---

(*) J'ai voulu donner la démonstration ci-dessus sans aucune hypothèse sur la différence $p - p_1$. Mais je démontrerai dans un autre mémoire que la pression p_1 qui varie autour d'un point est cependant, lorsqu'il s'agit d'un courant à filets rectilignes et parallèles, la même pour les deux éléments particuliers passant en ce point dont l'un est parallèle et l'autre perpendiculaire au fil de l'eau. On a donc $p = p_1$ et tang $2\theta = \infty$ où $\theta = 45$ degrés. Donc les trois familles de surfaces sans frottement sont:

1° Les plans normaux aux deux courbes d'égale vitesse;

2° Les deux systèmes de surfaces développables engendrées par deux droites tracées dans les plans normaux aux deux courbes d'égale vitesse, s'appuyant sur ces courbes et inclinées à 45 degrés de part et d'autre de la section transversale du courant.

du tuyau, tandis que dans les seconds les courbes d'égale vitesse ont des situations très-irrégulières (voir les figures 4, 5, 6, 7, Pl. 134) extraites de l'ouvrage de M. Bazin qui confirment pleinement toute cette théorie.

Dans les expériences sur les canaux découverts rapportées par M. Bazin, on remarque en général que vers le fond les courbes d'égale vitesse se rapprochent assez du parallélisme, tandis qu'en s'approchant de la surface elles deviennent de plus en plus divergentes; ce qui montre que c'est vers la surface que le mouvement est le plus tumultueux et le moins près du parallélisme. C'est en effet ce que M. Bazin a remarqué (*).

Je vais maintenant, me servant des propriétés précédentes, aborder le problème de la distribution des vitesses.

CHAPITRE III.

DISTRIBUTION DES VITESSES DANS UN COURANT A FILETS RECTILIGNES ET PARALLÈLES QUEL QUE SOIT LE PÉRIMÈTRE MOUILLÉ.

Propositions fondamentales. — On établit en hydraulique sur les tuyaux de conduite et les canaux découverts deux propositions fondamentales, savoir :

1° *La pression (ou la charge, s'il s'agit de conduite) décroît proportionnellement au chemin parcouru suivant la direction du courant.*

2° *La pression varie dans une section transversale suivant la loi hydrostatique, c'est-à-dire qu'en un point quelconque d'une même section, elle est proportionnelle à la distance de ce point à un plan horizontal fixe.*

Ces propositions ne sont exactes que sous la réserve des

(*) Dans le mémoire cité page 244, j'explique ce phénomène de la manière la plus naturelle sans recourir à des mouvements tumultueux. (*Note du* 30 *août* 1867.)

observations que j'ai faites précédemment sur l'inégalité de transmission des pressions dans les liquides naturels. Et en négligeant cette inégalité que je démontrerai dans un autre mémoire ne pas exister dans le sens parallèle ou perpendiculaire à un courant comme celui que je considère (*), j'observerai encore que la démonstration qu'on donne habituellement de la seconde proposition repose essentiellement sur ce qu'il n'y a pas de frottement suivant la section transversale du cours d'eau; et j'ai montré qu'il ne peut pas en être ainsi. Les démonstrations que je vais donner reviennent au fond à celles qu'on donne toujours; mais je les présenterai avec rigueur.

Soient trois axes de coordonnées, l'axe des x dirigé suivant le courant, l'axe des y suivant l'horizontale de la section transversale et celui des z suivant la ligne de plus grande pente de cette section.

Projetons sur ces trois axes les forces qui agissent sur un parallélipipède infiniment petit $dx dy dz$. Les frottements sur les faces perpendiculaires aux x et aux y sont toujours désignés respectivement par T_2 et T_1; enfin, on sait que l'action tangentielle sur la face perpendiculaire aux x a pour composante suivant y : T_2 et suivant z : T_1. Toutes ces forces sont indiquées dans le tableau suivant :

Parallèlement	aux x :	T_1,	T_2,	p,
id.	aux y :	T_2,	p,	o,
id.	aux z :	T_1,	o,	p.

Il faut y ajouter la pesanteur dont les composantes rapportées à l'unité de masse sont, suivant x, y et z :

$$\Pi \cos j; \quad 0 \quad \text{et} \quad \Pi \sin j,$$

en appelant Π le poids de l'unité de volume du liquide et j l'inclinaison du courant sur la verticale.

(*) Je l'ai démontré dans le mémoire cité p. 244. (*Note du 30 août 1867.*)

On reconnaît facilement, d'après cela, que les trois équations de projection sont :

Sur les x : $$\frac{dp}{dx} + \frac{dT_2}{dy} + \frac{dT_1}{dz} = \Pi \cos j,$$

Sur les y : $$\frac{dp}{dy} = 0,$$

Sur les z : $$\frac{dp}{dz} = \Pi \sin j.$$

Il est remarquable que dans ces deux dernières relations n'entre pas le frottement. Cela tient à ce que celui-ci dépendant uniquement des vitesses absolue et relative, ne varie pas d'une section à une autre, c'est-à-dire que l'on a :

$$\frac{dT_2}{dx} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{dT_1}{dx} = 0.$$

C'est pour cette raison que la deuxième des propositions énoncées plus haut se maintient malgré l'existence du frottement transversalement au cours de l'eau.

Quant à la pression p, on voit que tous les termes, sauf $\frac{dp}{dx}$ dans la première équation, sont indépendants de x; il faut donc qu'il en soit de même de $\frac{dp}{dx}$; donc P est une fonction linéaire de x; de là, la première des propositions énoncées.

Équation différentielle donnant la vitesse en un point quelconque indépendamment de toute hypothèse particulière sur la fonction du frottement. — Pour obtenir l'équation aux vitesses, le moyen le plus court est d'exprimer l'équilibre d'un cylindre de longueur quelconque l pris dans la masse fluide et ayant pour base une courbe d'égale vitesse. Nous avons vu que ce cylindre donnera non-seulement une valeur constante pour V, mais pour $\frac{dV}{dn}$ sur tous les points de sa surface; cela tient au parallélisme de toutes les sur-

faces analogues ; par suite le frottement sera constant et égal à ϖ sur toute l'étendue de la paroi du cylindre.

Le frottement total sur cette paroi sera donc :

$$\varpi s l,$$

s étant le périmètre de la courbe de base. Soient p' et p les pressions normales sur les centres de gravité des deux bases et ω leur aire commune. En vertu de la proposition 2, la différence des pressions sur ces bases sera

$$\omega(p' - p).$$

Enfin le poids du cylindre projeté sur son axe sera :

$$\Pi \omega l \cos j,$$

j étant l'inclinaison du courant sur la verticale. On aura donc l'équation

$$\varpi s l = \omega(p' - p) - \Pi \omega l \cos j = 0,$$

ou

$$\varpi s l = \Pi \omega \left(l \cos j - \frac{p' - p}{\Pi} \right).$$

Soient g et g' (*fig.* 8) les centres de gravité des bases ; z et z' leurs distances ga et $g'a'$ à une horizontale ; soient enfin $g\alpha = \frac{p}{\Pi}$ et $g'\alpha' = \frac{p'}{\Pi}$ les hauteurs représentatives des pressions. On aura :

$$l \cos j = z' - z,$$

et

$$\varpi s l = \Pi \omega \left[\left(z - \frac{p'}{\Pi} \right) - \left(z - \frac{p}{\Pi} \right) \right] = \Pi \omega (\alpha' \beta),$$

ou

$$\varpi = \Pi \frac{\omega}{s} \times \frac{\alpha' \beta}{l}.$$

Mais $\frac{\alpha'\beta}{l}$ est constant en vertu de la proposition 1 : c'est la perte de charge par unité de longueur que nous appellerons i. Cette constance est d'ailleurs prouvée par la dernière relation elle-même ; car si l'on avait pris une autre portion l_1 du même cylindre, on serait arrivé à

$$\varpi = \Pi \frac{\omega}{s} \times \frac{(\alpha'_1\beta_1)}{l_1}.$$

Ce qui exige que $\frac{\alpha'\beta}{l} = \frac{\alpha'_1\beta_1}{l_1} = \text{constante} = r.$

On aura donc définitivement :

$$\varpi = \Pi \frac{\omega}{s} i$$

ou

$$\varpi = \Pi \rho i \qquad (3)$$

en posant $\frac{\omega}{s} = \rho$. On voit que la quantité ρ, rapport de l'aire au périmètre de l'une quelconque des courbes d'égale vitesse, qu'on appelle ordinairement le rayon moyen, est ici variable : c'est le *paramètre* qui caractérise celle des courbes d'égale vitesse que l'on considère, c'est *une coordonnée* de cette courbe.

La relation (3) que nous venons de trouver est très-remarquable par sa généralité et sa simplicité ; elle ne repose sur aucune hypothèse particulière du frottement.

Nous avons trouvé plus haut une autre expression de ϖ, savoir (page 259) :

$$\varpi = A \frac{dV}{dn}.$$

Égalant ces deux valeurs, il vient :

$$A \frac{dV}{dn} = \Pi i \rho \qquad (B)$$

pour l'équation différentielle qui détermine la vitesse en un point quelconque du liquide. dn désigne ici une longueur dirigée suivant la normale à la surface d'égale vitesse au paramètre ρ.

Intégration de l'équation aux vitesses. — Cette équation peut s'intégrer quel que soit le contour curviligne ou polygonal du courant et sans faire aucune hypothèse particulière sur la fonction A. Pour cela, nous allons lui faire subir différentes transformations. Et d'abord, soit F (V) une fonction de la vitesse telle que sa dérivée :

$$\frac{dF(V)}{dV} = A.$$

On aura d'après l'équation (B) :

$$\frac{dF(V)}{dV} \times \frac{dV}{dn} = \Pi i \rho$$

ou

$$dF(V) = \Pi i \rho dn,$$

ou enfin

$$F(V) - F(V_0) = \Pi i \int_{n0}^{n} \rho dn, \qquad (B')$$

n étant la distance normale entre la courbe quelconque de vitesse V et une courbe d'égale vitesse fixe, et n_0, la distance analogue pour la courbe de vitesse V_0. ρ qui est le rapport $\frac{\omega}{s}$ de l'aire au périmètre d'une courbe quelconque est une fonction de n. Cette fonction, à cause de l'équidistance des courbes d'égale vitesse, est très-facile à déterminer. On reconnaît très-aisément que la longueur s de l'une quelconque de ces courbes distantes de la longueur n d'une courbe fixe est :

$$s = s_0 + e(n - n_0),$$

s_0 et n_0 étant les valeurs de s et de n relatives à cette courbe fixe, e la différence des angles que forment ses normales ex-

trêmes avec un axe fixe ; que l'on a de même pour la surface mouillée de l'une des courbes d'égale vitesse :

$$\omega = \omega_0 + s_0(n - n_0) + \frac{1}{2} e (n - n_0)^2$$

et

$$\rho = \frac{\omega}{s} = \frac{\omega_0 + s_0 (n - n_0) + \frac{1}{2} e (n - n_0)^2}{s_0 + e(n - n_0)}.$$

Par suite l'équation (B') devient :

$$F(V) - F(V_0) = \Pi i \int_{n0}^{n} \frac{\omega_0 + (n - n_0) s_0 + \frac{1}{2} e (n - n_0)^2}{s_0 + e (n - n_0)} dn.$$

L'intégrale du second membre se trouve facilement et donne définitivement :

$$F(V) - F(V_0) = \Pi i \left[\frac{1}{4} (n - n_0)^2 + \frac{2e}{s_0} (n - n_0) + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{\omega_0}{e} - \frac{s^2_0}{2e^2} \right) lgnp \left(\frac{s_0 + e(n - n^0)}{s_0} \right) \right]. \qquad (B_1)$$

Telle est l'équation générale qui fournit la vitesse en un point quelconque, quand on connait la vitesse V_0 le long d'une courbe d'égale vitesse ayant pour périmètre s_0 et pour aire ω_0. Elle ne repose sur aucune hypothèse. La fonction F(V) qui y entre dépend uniquement de l'idée qu'on se fait du frottement ; mais quelle que soit cette idée, l'équation ci-dessus subsiste dans son ensemble. Si l'on admettait par exemple avec Navier que le frottement fût proportionnel à la vitesse relative, on aurait simplement :

$$F(V) = \varepsilon V,$$

le coefficient ε devant être déterminé expérimentalement.

Mais cette hypothèse est désavouée par les faits; et, comme je l'ai dit en commençant, la fonction F(V) devra être déterminée de toutes pièces par la comparaison de la relation (B_1) avec l'expérience. La forme de cette fonction reste la même pour un liquide déterminé quelles que soient les conditions particulières de l'écoulement. Cette fonction déterminée une fois pour toutes, l'équation (B_1) donne toutes les lois les plus générales du mouvement par filets rectilignes et parallèles quelle que soit la courbe formant le périmètre mouillé.

La vitesse V_0 qui y entre dépend du frottement contre la paroi. C'est donc seulement par la constante $F(V_0)$ qu'interviendra la nature de la paroi.

Cas où le perimètre mouillé est polygonal. — Il nous reste maintenant, pour compléter la solution, à intégrer l'équation (B') dans le cas où le périmètre mouillé est polygonal. Alors les lignes d'égale vitesse sont des polygones équidistants, et l'on reconnaît facilement qu'on arriverait encore à l'équation intégrale (B_1) trouvée ci-dessus; seulement la lettre e, au lieu de représenter l'angle des normales extrêmes, aurait une signification que voici :

Soient a_0, a_1, a_2....., a_n les angles extérieurs aux différents sommets du polygone d'égale vitesse fixe de longueur s_0 et de section ω_0, on aura :

$$e = 2\left(\tang\frac{a_0}{2} + \tang\frac{a_1}{2} + \ldots + \tang\frac{a_n}{2}\right) = 2\Sigma\tang\frac{a}{2}. \quad \text{(III)}$$

Cas des tuyaux de forme cylindrique et à base quelconque. — Dans les tuyaux, l'expérience semble montrer que l'écoulement se fait par filets rectilignes et parallèles. Un des cylindres d'égale vitesse est, dans ce cas, le tuyau lui-même. Tous les autres lui sont donc parallèles, et la répartition des vitesses se trouve par l'équation (B_1). Toutes les courbes de même vitesse étant, dans ce cas, fermées on a :

$e = 2\pi$. L'équation (B) se simplifie d'ailleurs en comptant les n à partir de la courbe V_0, ce qui permet de faire : $n = 0$.

Conduite circulaire. — Pour la conduite circulaire, en supposant que V_0 soit la vitesse du filet central et que les n se comptent depuis ce filet, on a :

$$n_0 = s_0 = \omega_0 = 0,$$

et l'équation (B_1) se réduit à :

$$F(V) - F(V_0) = \frac{\Pi i n^2}{4}, \qquad (G)$$

n, étant la distance du point dont la vitesse est V au filet central.

Conduite formée par un polygone régulier. — Cette même équation s'applique aux conduites formées par un polygone régulier quelconque; car on peut encore faire dans ce cas :

$$n_0 = s_0 = \omega_0 = 0.$$

Seulement n représente alors, non plus la distance de la molécule que l'on considère au centre, mais l'apothème du polygone d'égale vitesse dont le point occupé par cette molécule fait partie.

Conduite rectangulaire. — M. Bazin a fait des expériences sur deux conduites rectangulaires. Soient donc a le plus grand et b le plus petit des côtés du rectangle. Supposons que V_0 soit la vitesse le long du rectangle central ayant pour côtés $a—b$ et o, et comptons les n à partir de la ligne droite à laquelle se réduit ce rectangle. On aura :

$$n_0 = 0, \quad \omega_0 = 0, \quad s_0 = 2(a - b),$$

Et enfin

$$e = 2 \sum \tang \frac{a}{2} = 8.$$

L'équation (B_1) devient :

$$F(V) - F(V) = \frac{\Pi i}{4}\left[n^2 + \frac{(a-b)n}{2} - \frac{(a-)b^2}{8} \, lqnp\left(\frac{a-b+4n}{a-b}\right)\right] (D).$$

On pourrait multiplier ces applications; mais elles sont toutes contenues dans l'équation (B_1), en sorte qu'il est inutile d'insister davantage.

CHAPITRE IV.

DÉTERMINATION EXPÉRIMENTALE DE LA FONCTION F (V). — LOIS DU FROTTEMENT DE DEUX FILETS LIQUIDES. — FORMULE DE LA RÉPARTITION DES VITESSES INDEPENDANTE DE LA NATURE ET DU DIAMÈTRE DES TUYAUX. — VÉRIFICATION DE CETTE FORMULE.

Nous avons maintenant à déterminer la fonction F (V) de laquelle dépendent les lois du frottement entre deux filets liquides contigus. Nous nous servirons pour cela des expériences faites par M. Darcy sur les tuyaux circulaires. La formule applicable à ces tuyaux est, comme nous l'avons vu :

$$F(V) - F(V_0) = \frac{\Pi}{4} r^2 i, \qquad (G)$$

en désignant par r la distance d'une molécule dont la vitesse est V, au filet central, dont la vitesse V_0. i est d'ailleurs la perte de charge par unité de longueur.

Ceci posé, M. Darcy a étudié la distribution des vitesses dans cinq tuyaux en fonte, savoir :

1° Un tuyau en fonte neuve de 0.188 de diamètre;

2° Un tuyau recouvert de dépôts de 0.2432 de diamètre;

3° Le précédent nettoyé de 0.2447 de diamètre;

4° Un tuyau très-bien nettoyé de 0.297 de diamètre;

5° Un tuyau en fonte neuve de 0.50 de diamètre.

Chacun de ces tuyaux a été expérimenté pour des valeurs de la pente ou perte de charge i variant entre des limites très-étendues. Pour chaque pente, on a observé :

1° La vitesse centrale V_0 correspondant à $r = 0$;

2° Les vitesses V' et V'' pour deux valeurs parti-

culières r' et r'' de r correspondant généralement aux points situés au tiers et aux deux tiers du rayon de la conduite.

Pour appliquer ses résultats à la détermination de la fonction F(V), je remarque qu'on peut écrire approximativement :

$$F(V_0) - (FV_0) = (V - V_0)F'(V_0) + \frac{(V - V_0)^2}{1.2}F''(V_0),$$

ou en vertu de la relation (G):

$$\frac{\Pi}{4}r^2 i = (V - V_0)F'(V_0) + \frac{(V - V_0)^2}{2}F''(V_0).$$

Chaque expérience nous donnera donc les deux équations :

$$\left.\begin{aligned} \frac{\Pi}{4}r'^2 i &= (V' - V_0)F'(V_0) + \frac{(V' - V_0)^2}{2}F''(V_0) \\ \frac{\Pi}{4}r''^2 i &= (V'' - V_0)F'(V_0) + \frac{(V'' - V_0)^2}{2}F''(V_0) \end{aligned}\right\} \quad (4).$$

où tout est connu, sauf $F'(V_0)$ et $F''(V_0)$. Nous pouvons donc déterminer numériquement ces deux fonctions pour les diverses valeurs observées de V_0.

Voici un tableau donnant ces valeurs :

La colonne 1 donne les numéros des expériences (*).

La colonne 2 donne les pentes i sur lesquelles les expériences ont été faites.

La colonne 3, les distances au centre des points auxquels on a observé la vitesse dans chaque expérience (ces distances sont les mêmes pour toutes les expériences faites sur un même tuyau).

La colonne 4, les vitesses correspondantes aux distances r portées à la colonne 3. Les vitesses correspondantes à $r = 0$

(*) Ces numéros d'ordre ne sont pas ceux que portent les mêmes expériences dans l'ouvrage de M. Darcy. Nous avons pris pour les désigner la suite naturelle des nombres.

sont celles que nous appelons V_0 quand nous voulons les désigner d'une manière spéciale.

La colonne 5 donne les valeurs de $F'(V_0)$ calculées d'après les équations (4) et changées de signe.

Dans la colonne 6, on a reproduit les valeurs de la variable V_0 correspondantes aux valeurs de la fonction $F'(V_0)$ portées à la colonne 5.

Enfin, pour mieux suivre la marche de la fonction $F'(V_0)$, on l'a représentée graphiquement pour chaque tuyau, les abscisses étant V_0 et les ordonnées, $-F'(V_0)$. (Voir les fig. 9, 10, 11, 12, 13, Pl. 134.)

Tableau n° 1.

NUMÉROS des expériences. 1	i 2	r 3	V 4	$-F'(V_0)$ 5	V_0 6
			D=0.188		
1	0.00368	0.0000 0.0325 0.0637	0.944 0.901 0.810	0.01975	0.944
2	0.00805	» » »	1.409 1.345 1.223	0.02760	1.409
3	0.01340	» » »	1.809 1.732 1.561	0.04358	1.809
4	0.02550	» » »	2.365 2.255 2.030	0.04711	2.365
5	0.03810	» » »	3.015 2.888 2.595	0.07367	3.015
6	0.1098	» » »	5.212 5.001 4.451	0.13711	5.212
			D=0.2432		
7	0.00202	0.000 0.044 0.088	0.575 0.538 0.456	0.0243	0.575
8	0.00473	» » »	0.876 0.811 0.694	0.0277	0.876
9	0.0229	» » »	1.883 1.753 1.489	0.0698	1.883
10	0.0320	» » »	2.273 2.118 1.771	0.0890	2.273
11	0.13981	» » »	4.593 4.275 3.689	0.1585	4.593

Suite du tableau précédent.

NUMÉROS des expériences 1	i 2	r 3	V 4	$-F'(V_0)$ 5	V_0 6
			D = 0.2447		
12	0.00165	0.000 0.044 0.088	0.686 0.602 0.571	0.0243	0.686
13	0.00498	» » »	1.066 1.010 0.886	0.0383	1.066
14	0.02035	» » »	2.201 2.078 1.853	0.0773	2.201
15	0.113443	» » »	5.145 4.872 4.362	0.1587	5.145
			D = 0.297		
16	0.0007	0.000 0.052 0.102	0.420 0.396 0.343	0.0179	0.420
17	0.00617	» » »	1.515 1.449 1.314	0.0551	1.515
18	0.1125	» » »	2.054 1.956 1.772	0.0637	2.054
19	0.02251	» » »	2.834 2.712 2.466	0.1048	2.836
			D = 0.50		
20	0.0006	0.0000 0.09 0.17	0.507 0.535 0.477	0.0287	0.5707
21	0.0125	» » »	1.050 0.993 0.910	0.0337	1.050
22	0.00260	» » »	1.309 1.217 1.126	0.0594	1.3109

On voit que pour chaque conduite la fonction F′ (V_0) est représentée très-exactement par une ligne droite allant à l'origine des coordonnées (*fig.* 10, 11, 12, 13).

Soit 2ε le coefficient angulaire de l'une quelconque de ces droites. On aura :

$$F'(V_0) = 2\varepsilon V_0,$$

ou, en supprimant maintenant l'indice de la variable :

$$F'(V) = -2\varepsilon V.$$

D'où

$$F(V) = -\varepsilon V^2 + \text{constante},$$

et

$$F(V) - F(V_0) = \varepsilon(V_0^2 - V^2) = \frac{\Pi}{4} r^2 i \qquad (5)$$

C'est là la formule qui donne la distribution des vitesses.

Il s'agit maintenant de déterminer la valeur du coefficient ε. On a :

$$\varepsilon = \frac{\Pi r^2 i}{4(V_0^2 - V^2)}. \qquad (6)$$

J'ai calculé les valeurs de ε pour chacune des expériences citées plus haut, et les résultats de ces calculs sont consignés dans le tableau suivant, où

La colonne 1 donne les numéros des expériences;

La colonne 2, les valeurs de i;

La colonne 3, celles de r;

Et la colonne 4, les valeurs correspondantes de ε déduites de la formule (6).

Tableau n° 2.

NUMÉROS des expériences 1	i 2	r 3	$\varepsilon = \frac{F(V) - F(V_0)}{V_0^2 - V^2}$ 4	MOYENNE des ε 5	$\frac{\varepsilon}{\sqrt{r}} = K$ 6	MOYENNE de K 7
			D = 0.188.			
1	0.00368	0.0325 0.0637	0.0140 0.0181			
2	0.00805	» »	0.0141 0.0195			
3	0.01340	» »	0.0140 0.0 65	0.013855 0.017350	0.076826 0.0687	0.072763
4	0.02250	» »	0.0126 0.0167			
5	0.03810	» »	0.0143 0.0174			
6	0 00098	» »	0.0141 0.0159			
			D = 0.2432.			
7	0.00202	0.044 0.088	0.0237 0.0318			
8	0.00473	» »	0.0287 0.0380			
9	0.0229	» »	0.0234 0.0333	0.02238 0.03486	0.0999 0.1173	0.1087
10	0.0320	» »	0.0227 0.0351			
11	0 13981	» »	0.02 4 0.0361			
			D = 0.2447.			
12	0.00165	0.044 0.088	0.0223 0.0278			
13	0.00498	» »	0 0193 0.0256	0.0195 0.0273	0.0944 0.0923	0.09325
14	0.02035	» »	0.0181 0.0272			
15	0.11343	» »	0.0191 0.0287			

Suite du tableau précédent.

NUMÉROS des expériences. 1	i 2	r 3	$E=\dfrac{F(V)-F(V_0)}{V_0^2-V^2}$ 4	MOYENNE des E 5	$\dfrac{E}{\sqrt{r}}=K$ 6	MOYENNE de K 7
			D = 0.297.			
16	0.0007	0.052 0.102	0.0224 0.0322	0.0232 0.0320	0.1017 0.0999	0.1008
17	0.00617	» »	0.0342 0.0332			
18	0.01125	» »	0.0219 0.0306			
19	0.02251	» »	0.0243 0.0328			
			D = 0.50.			
20	0.0006	0.09 0.17	0.0305 0.0440	0.0294 0.0426	0.0981 0.1009	0.0990
21	0.0125	» »	0.0283 0.0428			
22	0.00260	» »	0.0293 0.0411			

Si le mouvement s'opérait rigoureusement par filets rectilignes et parallèles, ε devrait être constant pour toutes les expériences, puisque la fonction F(V) ne doit dépendre que de la nature du liquide et non de l'étendue et de la nature de la section mouillée. On voit qu'il n'en est pas ainsi, que ε subit de très-notables variations, d'où l'on conclut que dans les conduites, le mouvement idéal que nous avons étudié subit des perturbations plus ou moins profondes. C'est l'influence de ces perturbations qu'il s'agit maintenant d'apprécier par la comparaison de nos formules avec l'observation (*).

(*) Dans le travail cité page 244, j'ai étudié cette influence d'une manière bien plus exacte par l'analyse et sans hypothèse.

(*Note du* 30 *août* 1867.)

Or on reconnaît d'abord à l'inspection dn tableau n° 2 que pour un même tuyau et pour une valeur déterminée de r, le coefficient ε reste constant, quelle que soit la pente. Ainsi, dans le tuyau de 0.188 de diamètre pour r=0.0325, on a pour ε les valeurs :

0.0140, 0.0141, 0.0140, 0.0126, 0.0143, 0.0141,

dont les différences sont insignifiantes, bien que la pente varie dans des limites très-étendues (depuis 0.00368 jusqu'à 0.0098).

Les autres tuyaux donnent, comme on peut le voir, des résultats analogues. On peut donc dire que ε est indépendant de la pente, et que, dans un tuyau donné, il ne varie qu'avec r. C'est pourquoi, au tableau ci-dessus, j'ai ajouté la colonne 5, dans laquelle, sous ce titre : moyenne des ε, j'ai pris pour chaque tuyau les deux valeurs moyennes que prend ce coefficient pour les deux valeurs correspondantes de r. Ainsi, dans le tuyau de 0.188, la valeur de ε, déduite de la moyenne des six premières expériences, est :

0.013855 pour r = 0.0325,

et 0.017350 pour r = 0.0637.

On voit que ces moyennes varient d'une conduite à l'autre, ce qui ferait croire que ε dépend aussi du diamètre de ces conduites; mais ce serait là une erreur. Je dis que ε ne varie qu'avec la distance de r. *mais qu'elle ne dépend ni de la nature ni du diamètre des conduites*; que si ce coefficient change avec les tuyaux soumis à l'expérience, c'est uniquement parce que les distances au centre des filets sur lesquels portent les observations changent d'une conduite à l'autre; je dis, en un mot, que ε est uniquement fonction de r. Cette fonction est même très-simple; on a très-sensiblement :

$$E = K\sqrt{r} \qquad (6)$$

K étant une constante. J'ai donné les valeurs de cette constante à la colonne 6 du tableau n° 2, et l'on voit combien peu elles varient malgré les changements notables qui existent dans la nature et le diamètre des tuyaux soumis à l'expérience. Il n'existe une petite différence que pour le tuyau de 0m.188, et nous verrons plus loin qu'elle provient de ce que les expériences faites sur ce tuyau ne sont pas d'une rigueur parfaite. La valeur moyenne de K est 0.0947 et la relation (5) peut s'écrire :

$$K\sqrt{r}\,(V_0^2 - V^2) = \frac{\Pi}{4} r^2 i, \qquad (7)$$

ou

$$0.0947\sqrt{r}\,(V_0^2 - V^2) = \frac{\Pi}{4} r^2 i;$$

d'où

$$V_0^2 - V^2 = 2640\, r^{\frac{3}{2}} i = a i r^{\frac{3}{2}}, \qquad (C_1)$$

en désignant par la lettre a le coefficient numérique 2640.

Telle est la formule très-simple qui donne la vitesse en un point quelconque d'un courant symétrique par rapport à un filet central *quelles que soient la position et la nature de la paroi.*

On en déduit facilement les lois du frottement de deux filets liquides. En la différentiant par rapport à r, il vient en effet :

$$-2V\frac{dV}{dr} = \frac{3}{2}\, a i r^{\frac{1}{2}};$$

d'où

$$-\frac{2\Pi}{3a} r^{\frac{1}{2}} V \frac{dV}{dr} = \frac{\pi i r}{2}.$$

Le second membre représente le frottement sur le cylindre du rayon r; il en est donc de même du premier. De là cette proposition :

Le frottement entre deux cylindres concentriques infiniment voisins est proportionnel au produit de leur vitesse

absolue par leur vitesse relative et par la racine quarrée de leur rayon.

Cette loi est toute différente de celle que M. Darcy a déduite empiriquement des mêmes expériences. Selon ce savant, le frottement en un point quelconque d'un tuyau serait proportionnel au quarré de la vitesse relative et au quarré du rayon. J'ai montré que la proportionnalité au quarré de la vitesse relative est impossible quelque idée qu'on se fasse du frottement. Quant à l'intervention du rayon de la conduite, M. Darcy dit qu'il n'en peut pas donner « la raison philosophique. » Il pense qu'elle tient à ce que les filets ne sont pas rectilignes. Mais, comme je l'ai dit au chapitre I, si les trajectoires sont sinueuses, et cela est incontestable, le frottement doit dépendre avant tout de leurs flèches ; et comme ces flèches, nulles au centre augmentent à mesure que l'on s'approche de la paroi, le frottement doit nécessairement augmenter avec r bien plutôt qu'avec le diamètre de la conduite. Ce dernier élément semble tout à fait étranger à la question, et en montrant que les expériences peuvent se résumer toutes dans une formule qui ne le contient pas, je crois donner une solution plus satisfaisante que celles admises jusqu'ici. Voici d'ailleurs comment il faut entendre les conséquences que donne cette formule relativement au frottement :

Considérons (*fig.* 14) le mouvement sinueux quel qu'il soit dans un tuyau ; le frottement T qui existe en un point quelconque M entre deux filets curvilignes infiniment voisins ne peut dépendre que de la vitesse absolue V au point M et de la vitesse relative $\frac{dV}{dn}$, dn étant compté suivant la normale à la trajectoire ABC. Cette force T est indépendante de r, aussi bien que du rayon du tuyau. Cela est de toute évidence ; la loi rigoureuse du frottement est une propriété intime du liquide, aussi bien que sa densité, sa couleur, etc... Cette propriété ne peut donc pas changer suivant que le

liquide s'écoule dans tel ou tel tuyau. Mais ce n'est malheureusement pas cette propriété que nous pouvons apprécier; car, d'une part, l'expérience ne nous donne pas la vitesse V dont elle dépend ; elle ne nous donne que sa projection sur l'axe du tuyau; elle ne nous fait pas davantage connaître les forces T, mais seulement la résistance au mouvement estimée aussi suivant l'axe de la conduite. Or cette résistance serait, si l'on écrivait l'équation d'équilibre de la surface de révolution ABC, $A_1B_1C_1$, comme nous avons écrit au chapitre III, l'équation de l'équilibre d'un cylindre de rayon r quand il s'est agi du mouvement rectiligne, la somme des projections sur l'axe, des actions tangentielles et normales T et P. Cette somme dépendra évidemment de la direction des forces T et P, c'est-à-dire de la nature de la courbe ABC et par suite de r. Mais le frottement ou action tangentielle T n'en dépendrait pas si nous pouvions l'apprécier.

En tous cas, les inductions de M. Darcy, qui voudraient que la résistance au mouvement fût indépendante de r et fût uniquement liée au diamètre du tuyau, sont démenties par la formule précédente, formule tout à fait indépendante de ce diamètre (*).

Il ressort d'ailleurs de ce qui précède que pour parler un langage plus correct, on doit, dans l'énoncé des lois qui résultent de la formule C_1, substituer au mot *frottement* l'expression : résistance au mouvement, ou, si l'on veut, on peut dire *que tout se passe dans les tuyaux comme si le mouvement était rigoureusement rectiligne et que le frottement de deux cylindres infiniment voisins fût proportionnel au produit de leur vitesse absolue par leur vitesse relative et par la racine quarrée de leur rayon.*

Comme corollaire on peut dire ceci :

(*) Et encore mieux par les considérations analytiques contenues dans le travail cité page 244. (*Note du 30 août* 1867.)

De ce que la résistance au mouvement est indépendante de la pente, on conclut que la pente n'a pas d'influence sur la nature des trajectoires décrites.

Je reviens maintenant, pour la vérifier, à la formule fondamentale :

$$V_0^2 - V^2 = 2640\, ir^{\frac{3}{2}}.$$

Vérification. — Elle se trouve en quelque sorte vérifiée par la manière même dont elle a été déduite des expériences. Cependant, comme il peut encore paraître douteux qu'on puisse comprendre dans une équation indépendante des diamètres toutes les expériences de M. Darcy, j'ai voulu, avant d'aller plus loin, mettre en parallèle les vitesses fournies par ma formule et celles que donne l'expérience. Les résultats de cette comparaison sont consignés dans le tableau suivant, qui se comprend de lui-même. Je dirai seulement que dans la colonne 7, sous la dénomination : *Écarts relatifs*, on a mis les rapports des différences entre les vitesses théoriques et les vitesses expérimentales à ces dernières.

Tableau n° 3.

Vérification de la formule : $V_0^2 - V^2 = 2640\, i r^{\frac{3}{2}}$

ou :

$$V = \sqrt{V_0^2 - 2640\, r^{\frac{3}{2}}\, i}.$$

NUMÉROS des expériences. 1	PENTES i. 2	V_0 3	r 4	VITESSES expérimentales. 5	VITESSES théoriques. 6	ÉCARTS relatifs. 7
			D = 0.188.			
1	0.00368	0.944	0.0325 0.0637	0.901 0.810	0.946 0.851	0.044 0.040
2	0.00805	1.409	» »	1.345 1.223	1.314 1 224	0.025 0.001
3	0.01340	1.809	» »	1.732 1.561	1.716 1.[illegible]36	0.009 0.049
4	0.02250	2.365	» »	2.255 2.030	2.262 2.120	0.003 0.045
5	0.03810	3 015	» »	2.888 2.595	2.890 2.706	0.001 0.051
6	0.1098	5.212	» »	5.001 4 451	4.992 4.691	0.015 0.060
			D = 0.2432.			
7	0.00202	0.575	0.044 0.088	0.538 0.456	0.531 0.4[illegible]7	0 015 0 010
8	0.00473	0.876	» »	0.811 0.694	0 807 0.664	0.005 0.040
9	0.0229	1.883	» »	1.753 1.489	1.728 1.402	0 014 0.058
10	0.0320	2.273	» »	2 718 1.771	2.094 1.721	0.007 0.028
11	0.13981	4.593	» »	4.275 3.689	4 205 3.385	0.016 0.[illegible]82

Suite du tableau précédent.

NUMÉROS des expériences. 1	PENTES i. 2	V_0 3	r 4	VITESSES expéri-mentales. 5	VITESSES théoriques. 6	ÉCARTS relatifs. 7
			D = 0.2447.			
12	0.00165	0.686	0.044 0.068	0.601 0.571	0.617 0.572	0.020 0.002
13	0.00498	1.066	» »	1.010 0.886	1.006 0.892	0.001 0.006
14	0.02035	2.201	» »	2.078 1.853	2.095 1.857	0.010 0.006
15	0.11343	5.145	» »	4.872 4.362	4.865 4.339	0.001 0.005
			D = 0.297.			
16	0.00070	0.420	0.052 0.102	0.398 0.343	0.399 0.349	0.002 0.001
17	0.00617	1.515	» »	1.449 1.314	1.434 1.306	0.010 0.011
18	0.01125	2.054	» »	1.956 1.772	1.957 1.786	0.001 0.003
19	0.02251	2.834	» »	2.712 2.466	2.704 2.423	0.006 0.018
			D = 0.50.			
20	0.0006	0.5707	0.09 0.17	0.535 0.477	0.532 0.462	0.006 0.029
21	0.00125	1.050	» »	0.993 0.910	0.967 0.910	0.024 0.016
22	0.00260	1.311	» »	1.241 1.326	1.236 1.112	0.002 0.010

On voit que sur 44 observations, il y en a :

22 pour lesquelles les écarts relatifs ne dépassent pas. . .			0.01
34	—	—	0.03
40	—	—	0.05
Et seulement 3 pour lesquelles les écarts sont entre 0.05 et			0.06

et une pour laquelle l'écart atteint 0.082. Mais cette expérience est fautive ; on le reconnaît de la manière suivante : M. Darcy a observé toutes les vitesses deux fois, en répétant les expériences de chaque côté et à égale distance du centre. Les différences entre les deux résultats donnent une idée des erreurs expérimentales. Or, pour l'expérience dont il s'agit, l'écart est de — 0m.304.

Par le même moyen, on reconnaît que les erreurs relatives d'observation atteignent 3 centièmes. On en conclut que sur les différences $V^2_0 - V_2$, et par suite sur le calcul de V par notre formule l'erreur relative provenant des expériences peut atteindre jusqu'à 6 centièmes. C'est, en effet, la limite des écarts que nous avons trouvés ; ce qui montre que notre formule reproduit très-fidèlement les expériences, et que si elles donnaient des écarts moins considérables, ce serait un effet du hasard et non une preuve en faveur de son exactitude. On reconnaît d'ailleurs que les écarts considérables ont lieu pour le tuyau de 0.188. C'est aussi celui dont les résultats cadrent le moins bien avec la formule donnée par M. Darcy. Il dit à ce sujet (page 152 de ses *Recherches expérimentales*) :

« Les quelques différences qui existent ne peuvent être attribuées qu'à la difficulté d'obtenir plus de précision dans les expériences. La moindre erreur, en effet, dans l'indication des instruments qui donne les vitesses entières doit influer d'*une manière très-sensible sur les différences des vitesses*, si l'erreur ne porte pas à la fois sur les deux vitesses. Le tuyau de 0.188 présente seul des différences dont l'explication se trouve dans les observations précédentes. »

Si l'on écarte ce tuyau et l'expérience erronée dont nous avons parlé, on voit qu'il ne reste plus qu'une expérience pour laquelle l'écart dépasse 0.04. La vérification de notre formule est donc très-satisfaisante. Son exactitude sera d'ailleurs encore confirmée plus loin par les conséquences que nous en tirerons relativement à la vitesse moyenne, dont la détermination est en définitive, du moins au point de vue de la pratique, le but que noùs devons surtout chercher à atteindre.

CHAPITRE V.

LOI DU FROTTEMENT CONTRE LA PAROI. — VÉRIFICATION.

Le frottement au contact du tuyau est proportionnel au quarré de la vitesse contre la paroi.—C'est là une loi qui se vérifie très-sensiblement par l'expérience et que l'on peut en quelque sorte prévoir ; voici comment :

On sait que quand un corps se meut dans un fluide, la résistance qu'il éprouve est proportionnelle : 1° au quarré de sa vitesse ; 2° à l'aire du contour apparent du corps sur un plan normal à la direction qu'il suit.

Si un corps en repos est plongé dans un liquide en mouvement, les actions réciproques entre le solide et le liquide sont les mêmes que si le premier était en mouvement et le second en repos.

A l'amont du corps, il s'exerce ce que Dubuat appelle une ***pression vive;*** à l'aval, une ***non-pression***, et la différence de ces forces projetée sur la direction du mouvement est proportionnelle au quarré de la vitesse du fluide et à la section du contour apparent.

Ceci posé, l'action retardatrice qu'un liquide éprouve de la part d'une paroi contre laquelle il glisse, est égale et contraire à la réaction que le liquide exerce lui-même sur cette surface, ou, si l'on veut, à la force avec laquelle le liquide

tend à *entraîner la paroi.* Or on voit très-aisément que cette force est produite, comme pour tout corps plongé, par les *pressions vives* et les *non-pressions* exercées par le liquide sur les facettes inclinées que forme le dépoli de la paroi; donc elle est proportionnelle : 1° au quarré de la vitesse contre la paroi; 2° à la saillie formée par les rugosités, saillie mesurée suivant la normale à la surface et représentant ici le contour apparent du corps plongé. Mais cette saillie, qui varie avec le degré de dépoli, est, pour une paroi déterminée, la même en tous les points; d'où l'on conclut que le frottement est proportionnel à l'étendue de la surface mouillée et à un coefficient dépendant de la nature de la paroi et représentant son degré de dépoli.

Analytiquement, ces diverses lois sont exprimées par la relation :

$$W^2 = \alpha R i, \qquad \text{(D)}$$

W étant la vitesse à la paroi, α un coefficient dépendant de la nature de la conduite, R son rayon et i la perte de charge. On sait en effet que Ri est proportionnel au frottement contre la paroi par unité de surface.

Pour vérifier cette formule, il nous faut montrer : 1° que $\frac{W^2}{i}$ est constant pour le même tuyau quelle que soit la pente, 2° que $\frac{W^2}{Ri}$ est constant quels que soient le rayon et la pente, pourvu que la nature de la conduite reste la même. Les calculs sont présentés dans le tableau suivant :

Tableau n° 4.

Vérification de la formule $W^2 = \alpha R i$.

NUMÉROS des expériences.	NATURE de la conduite.	RAYON de la conduite.	PERTE de charge.	W^2	$\frac{W^2}{i}$	MOYENNE des $\frac{W^2}{i}$	$\alpha = \frac{W^2}{Ri}$	$\frac{1}{\alpha}$
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	Fonte neuve.	0.188	0.00368	0.503235	137			
2	»	2	0.00805	1.085329	135			
3	»	»	0.01340	2.032009	152	148	1572	0.000636
4	»	»	0.02250	3.486500	155			
5	»	»	0.03810	5.639284	148			
6	»	»	0.1098	17.472724	149			
7	Fonte avec dépôts.	0.2432	0.00202	0.104495	54			
8	»	2	0.0473	0.237876	50			
9	»	»	0.0229	0.982189	43	47	402	0.00248
10	»	»	0.0320	1.584329	51			
11	»	»	0.13981	5.445649	39			
12	Fonte nettoyée	0.2447	0.00165	0.210480	127			
13	»	2	0.00498	0.653959	131	129	1054	0.000948
14	»	»	0.22035	2.67370	131			
15	»	»	0.11343	14.352944	127			
16	Fonte bien nettoyée	0.297	0.00070	0.083647	120			
17	»	2	0.00617	1.078624	175	162.50	1094	0.000914
18	»	»	0.01125	2.029261	180			
19	»	»	0.02251	3.932564	175			
20	Fonte neuve.	0.50	0.0006	0.128041	213			
21	»	2	0.08125	0.432061	346	342.50	1368	0.000731
22	»	»	0.00260	0.881771	339			

Les quatre premières colonnes donnent les numéros des expériences, la nature, le rayon et la pente de chaque conduite. La colonne 5 donne le quarré de la vitesse à la paroi, vitesse déduite de la formule (C) qui donne :

$$V_0^2 - W^2 \, (^*) = 2\,640 R^{\frac{3}{2}} i.$$

(*) Mes valeurs de W^2 sont notablement différentes de celles données par la formule empirique de M. Darcy. En exceptant le tuyau de $0^m.188$ sur les anomalies duquel j'ai déjà appelé l'atten-

La colonne 6 donne les valeurs de $\frac{W^2}{i}$; on voit que les chiffres varient très-peu pour une même conduite. La colonne 7 donne la valeur moyenne de $\frac{W^2}{i}$ pour chaque conduite ; la colonne 8 donne le coefficient α, et la colonne 9 l'inverse de α. Cette inverse n'est autre chose que le cofficient de résistance des diverses conduites.

Ces coefficients sont résumés par nature de conduite dans le tableau suivant :

Tableau n° 5.

NATURE DE LA PARÓI.	α	COEFFICIENT de résistance $\frac{1}{\alpha}$
Fonte avec dépôts.	402	0.00248
Fonte nettoyée.	1054	0.000948
Fonte bien nettoyée.	1094	0.000914
Fonte neuve..	1368	0.000731

J'ai écarté le tuyau de 0.188 qui donne évidemment une valeur trop grande et sur les expériences duquel j'ai déjà

tion, on remarque qu'elles sont, toutes plus faibles. Or cette loi de décroissance plus rapide des vitesses que donne ma formule théorique a été pressentie expérimentalement par M. Bazin dans ses recherches sur les canaux découverts demi-circulaires. — Voici ce qu'il dit page 243 de ses *Recherches hydrauliques :* « La formule de M. Darcy a été obtenue en mesurant la vitesse dans plusieurs tuyaux, au centre, au tiers et aux deux tiers du rayon. Elle représente très-bien les résultats d'expériences dont elle a été déduite, *mais comme toute formule empirique, elle ne peut être employée avec certitude en dehors des limites entre lesquelles elle a été obtenue, c'est-à-dire pour les points situés au delà des deux tiers du rayon.* » C'est précisément dans cette région que se manifeste la divergence des deux courbes (courbe de M. Darcy et courbe de M. Bazin pour les canaux demi-circulaires). *Il ne serait donc pas impossible que dans un tuyau fermé la décroissance des vitesses dans le voisinage de la paroi s'opérât plus rapidement que ne l'indiquerait la formule empirique de M. Darcy.*

fait remarquer, avec M. Darcy, qu'on ne pouvait pas compter. Il est difficile de vérifier d'une manière concluante la constance du coefficient α, les tuyaux de même nature et de rayons différents n'étant pas assez nombreux. Cependant en comparant les coefficients relatifs aux tuyaux de 0.188, de 0.297 et 0.50 qui sont presque de même nature, on est porté à penser que α n'est pas constant pour une nature déterminée de tuyau, mais qu'il augmente, avec R.

La formule (D) n'est donc qu'une première approximation ; le rapport $\frac{W^2}{Ri}$ est exprimé par une série, et l'on répond bien aux expériences en prenant pour les deux premiers termes de cette série, l'expression :

$$\alpha + \beta \sqrt{R},$$

au lieu de la constante α fournie par le raisonnement fait au commencement de ce chapitre. Nous substituerons donc à la formule D, celle-ci :

$$W^2 = Ri(\alpha + \beta \sqrt{R}).$$

En terminant ce sujet, je dois expliquer une différence qui semble exister entre les coefficients de résistance trouvés par M. Darcy et les chiffres ci-dessus.

On voit que d'après le tableau n° 5 le rapport entre ces coefficients est d'environ 2/7 pour la fonte avec dépôts et la fonte neuve. M. Darcy trouve pour ce rapport 1/2. Cette différence n'est qu'apparente. Elle tient à ce que M. Darcy appelle coefficient de résistance le rapport de l'expression Ri au quarré de la vitesse moyenne, tandis que j'appelle ainsi le rapport de Ri au quarré de la vitesse à la paroi. C'est ce dernier rapport qui me semble, en effet, caractériser la résistance de la paroi.



CHAPITRE VI.

DÉTERMINATION DE LA VITESSE MOYENNE DANS LES TUYAUX. FORMULES THÉORIQUES ET PRATIQUES. VÉRIFICATION DE CES FORMULES.

Reprenons la formule :

$$V_0^2 - V^2 = air^{\frac{3}{2}}. \qquad (C_1)$$

Soit U la vitesse moyenne, on a :

$$U = \frac{2}{R^2}\int_0^R Vrdr. \qquad (8)$$

Au point de vue de la détermination de U, nous pouvons sans inconvénient remplacer la formule (C_1) par la suivante :

$$V_0 - V = \frac{air^{\frac{3}{2}}}{V_0 + U}. \qquad (C_2)$$

En effet, pour toutes les vitesses plus rapprochées du centre que la vitesse moyenne, la formule (C_2) donne lieu sur V à une erreur par excès ; pour celles qui sont au contraire plus éloignées, on commet une erreur par défaut, et l'on comprend que dans la sommation (8) ces erreurs se compensent. Il est évident qu'il existe toujours entre les vitesses extrêmes V_0 et W une vitesse intermédiaire qui, mise à la place de U, dans la relation (C_2), rendrait la compensation dont je parle *mathématique ;* or nous verrons par la vérification expérimentale des conséquences auxquelles nous arriverons, que cette vitesse intermédiaire est très-peu différente de U, et qu'on peut sans inconvénient lui substituer cette dernière quantité.

Ceci posé, si nous effectuons l'intégrale qui donne la vi-

tesse moyenne, après avoir remplacé V par sa valeur tirée de C_2, nous trouvons cette expression très-simple :

$$U = V_0 - \frac{4aiR^{\frac{3}{2}}}{7(V_0 + U)},$$

ou

$$V_0^2 - U^2 = \frac{4}{7} ai R^{\frac{3}{2}}. \qquad (E)$$

Soit x la distance au centre du filet animé de la vitesse moyenne, on aura d'après (C_1) :

$$V_0^2 - U^2 = aix^{\frac{3}{2}};$$

d'où, à cause de (E) :

$$x^{\frac{3}{2}} = \left(\frac{4}{7}\right) R^{\frac{3}{2}},$$

et

$$x = \left(\frac{4}{7}\right)^{\frac{2}{3}} R = 0.689 R. \qquad (9)$$

Ainsi, le filet animé de la vitesse moyenne est aux 689 millièmes du rayon, ou, si l'on veut un peu au delà des deux tiers du rayon. C'est aussi le résultat auquel est arrivé M. Darcy par sa formule empirique qui concorde très-bien avec les expériences. C'est donc déjà là une preuve que la formule approximative employée pour arriver à la détermination de U est suffisamment exacte.

Nous avons déjà appelé W la vitesse à la paroi; elle est donnée par la formule

$$V_0^2 - W^2 = aiR^{\frac{3}{2}}; \qquad (10)$$

d'où en comparant à (E) :

$$V_0^2 - U^2 = \frac{4}{7}(V_0^2 - W^2),$$

ou

$$U^2 = \frac{3V_0^2 + 4W^2}{7} \qquad (11)$$

Telle est la formule qui unit les vitesses extrêmes à la vitesse moyenne.

M. Darcy a trouvé :

$$U = \frac{3V_0 + 4W}{7},$$

et vérifie cette formule ; mais la nôtre se vérifie également, et cela tient à ce que nos valeurs de W sont différentes de celles de M. Darcy, et j'ai montré que les prévisions expérimentales de M. Bazin sont plus favorables aux nôtres.

Je n'insiste pas sur toutes ces formules, parce que je veux arriver à la détermination pratique de la vitesse moyenne, résultat plus important.

Des équations (E) et (10) on déduit :

$$U^2 - W^2 = \frac{3}{7}\, aiR^{\frac{3}{2}}.$$

D'un autre côté, nous avons trouvé (page 297)

$$W^2 = \alpha Ri;$$

d'où

$$U^2 = Ri\left(\alpha + \frac{3}{7}\, a\sqrt{R}\right).$$

On voit que cette formule renferme deux coefficients : l'un α, dépend de la nature de la conduite ; nous en avons donné les valeurs pour les diverses espèces de conduites en fonte dans le chapitre précédent ; l'autre a, ne change pas avec les conduites ; il ne dépend que de la nature du liquide ; pour l'eau, il est représenté, comme nous l'avons vu, par le nombre 2640, en sorte que $\frac{3}{7}\, a = 1131$, et l'on a :

$$U^2 = Ri\left(\alpha + 1131\sqrt{R}\right). \qquad \text{(F)}$$

Nous allons maintenant chercher si cette formule est vérifiée par l'expérience.

Pour cette vérification nous chercherons :

1° Si l'expression $\frac{U^2}{i}$ est indépendante de la pente;

2° Si l'expression $\frac{U^2}{Ri} - 1131\sqrt{R}$ est constante pour des tuyaux de même nature, et si les diverses valeurs de cette constante sont les mêmes que celles déjà trouvées par un tout autre procédé au chapitre V (tableau n° 4).

Tableau n° 6.

Vérification de la formule $U^2 = Ri(\alpha + 1131\sqrt{R})$.

NUMÉROS des expériences. 1	i 2	VITESSE moyenne. U 3	$\frac{U}{\sqrt{i}}$ 4	MOYENNE de $\frac{U}{\sqrt{i}}$ 5	$\alpha = \frac{U^2}{Ri} - 1131\sqrt{R}$ 6
D=0.0359; R=0.1795. — Fonte chargée de dépôts.					
108	0.00025	0.051	3.2255		
109	0.00071	0.081	2.8460		
110	0.00183	0.130	3.0389		
111	0.00670	0.253	3.0909	3.0649	372
112	0.15250	0.381	3.0852		
113	0.03240	0.551	3.0611		
114	0.04153	0.633	3.1062		
D=0.0364; R=0.0182. — La même nettoyée.					
115	0.00071	0.113	4.2409		
116	0.00180	0.188	4.4312		
117	0.00651	0.3[illegible]7	4.8520		
118	0.01441	0.601	5.0069	4,8685	1151
119	0.03018	0.892	5.1346		
120	0.03966	1.034	5.1921		
121	0.04650	1.126	5.2217		
D=0.0795; R=0.03975. — Fonte chargée de dépôts.					
122	0.00065	0.123	4.8205		
123	0.00250	0.251	5.0200		
124	0.00755	0.416	5.2350	5.1772	450
125	0.01610	0.678	5.3434		
126	0.03100	0.931	5.2877		
127	0.04535	1.142	5.3564		
D=0.0801; R=0.04015. — La même nettoyée.					
128	0.00084	0.193	6.6591		
129	0.00294	0.385	7.1005		
129bis	0.00723	0.614	7.2210		
130	0.00737	0.624	7.2686	7.0957	1029
131	0.01557	0.864	6.9242		
132	0.02938	1.248	7.2810		
133	0.04173	1.526	7.2153		

Suite du tableau précédent.

NUMÉROS des expériences. 1	i 2	VITESSES U 3	$\frac{U}{\sqrt{i}}$ 4	MOYENNE de $\frac{U}{\sqrt{i}}$ 5	$\alpha=\frac{U^2}{Ri}-1131\sqrt{R}$ 6
D=0.0819; R=0.04095. — Fonte neuve.					
134	0.00020	0.088	6.2225	7.5644	1167
135	0.00083	0.171	6.9335		
136	0.00232	0.358	7.4326		
137	0.00531	0.561	7.6987		
138	0.01020	0.791	7.8321		
139	0.02255	1.185	7.8912		
140	0.03208	1.418	7.9170		
141	0.04042	1.571	7.8141		
142	0.09547	2.453	9.0309		
143	0.09904	2.487	7.9026		
144	0.11978	2.720	7.8592		
145	0.16807	3.238	7.8983		
146	0.17072	3.265	7.9021		
D=0.137; R=0.0685. — Fonte neuve.					
147	0.00024	0.149	9.6179	11.0408	1483
148	0.00087	0.298	10.1031		
149	0.00209	0.488	10.6745		
150	0.00475	0.763	11.0700		
151	0.01260	1.279	11.3944		
152	0.02250	1.710	11.4261		
153	0.03318	2.098	11.5172		
154	0.03905	2.281	11.5427		
155	0.09852	3.640	11.5962		
156	0.16756	4.693	11.4663		
D=0.0188; R=0.0945. — Fonte neuve.					
157	0.00027	0.205	12.4552	12.6697	1366
158	0.00175	0.497	11.8810		
159	0.00368	0.758	12.4955		
160	0.00805	1.128	12.5721		
161	0.01340	1.488	12.8545		
162	0.022150	1.933	12.8861		
163	0.03810	2.506	12.8531		
164	0.10980	4.323	13.0464		
165	0.14591	4.928	12.9024		
D=0.2432; R=0.1216. — Fonte chargée de dépôts.					
166	0.00094	0.307	10.1329	10.5511	520.93
167	0.00202	0.452	10.0568		
168	0.00473	0.707	10.2793		
169	0.01150	1.106	10.3186		
170	0.02290	1.547	10.2228		
171	0.03200	1.833	10.2462		
172	0.04105	2.073	10.2315		
173	0.13981	3.833	12.9259		

Suite du tableau précédent.

NUMÉROS des expériences.	i	VITESSES U	$\frac{U}{\sqrt{i}}$	MOYENNE de $\frac{U}{\sqrt{i}}$	$\alpha=\frac{U^2}{Ri}-1131\sqrt{R}$
1	2	3	4	5	6
		D=0 2447; R=0 12235. — La même nettoyée.			
174	0.00052	0.278	12.1514		
175	0.00165	0.537	13.3731		
176	0.00498	0.949	15.0434		
177	0 01155	1.420	13.2122	13.4058	1072
178	0.02035	1.904	13.3473		
179	0.02735	2.206	13.3394		
180	0.03730	2.572	13.3129		
181	0.11343	4.4997	13.4679		
		D=0.297; R=0.1485. — Bien nettoyée.			
182	0.00028	0.244	14.6156		
193	0.00119	0.538	15.5963		
184	0 00269	0.823	15.8684		
185	0.00537	1.155	15.7611	15.5748	1197
186	0.01105	1.652	15.7157		
187	0.02305	2.390	15.7429		
188	0.03205	2.799	15.6348		
189	0.04070	3.160	15.6635		
		D=0.50; R=0.25. — La même neuve.			
190	0.00045	0.4207	19.8312		
191	0.00045	0.4488	21.1568		
192	0.00060	0.4752	19.3992		
193	0.00120	0.7932	22.8980		
194	0.00125	0.7951	22.4881	21.8030	1335
195	0.00210	1.0412	22.7200		
196	0.00230	1.1135	23.2184		
197	0.00260	1.1197	21.9594		
198	0.00250	1.1278	22.5560		

Les trois premières colonnes de ce tableau donnent les numéros des expériences, les pentes et les vitesses moyennes expérimentales; la colonne 4 donne le rapport $\frac{U}{\sqrt{i}}$; on voit qu'il varie d'une manière insignifiante pour un même tuyau surtout pour les conduites dont le diamètre n'est pas extrê-

mement petit : on en a donné la moyenne pour chaque conduite dans la colonne 5 ; enfin dans la colonne 6, on a donné les valeurs du coefficient α qui est, comme nous l'avons vu précédemment, l'inverse de ce que nous appelons le coefficient de résistance. Si l'on rapproche les valeurs de α qui répondent à une nature déterminée de tuyau, on trouve :

Tableau n° 7.

NATURE DE LA CONDUITE. 1	VALEUR DE α dans les différents tuyaux de même nature. 2	MOYENNE des valeurs de α. 3
Fonte chargée de dépôts.	372 456 521	446
Fonte nettoyée..	1151 1029 1072	1084
Fonte bien nettoyée.	1197	1197
Fonte neuve.	1167 1483 1366 1335	1335

On voit que les chiffres de la colonne 2 pour chaque espèce ne sont pas très-différents, sauf le chiffre 372 pour la fonte avec dépôts. Mais ce chiffre correspond à un tuyau de 0.035 de diamètre seulement ; et dans ces tuyaux de faible diamètre, il s'ajoute aux forces que nous avons considérées, celles de la cohésion du liquide pour la paroi dont il n'a pas été tenu compte. Comme d'ailleurs ces tuyaux ne sont presque pas employés dans la pratique, il n'y a pas à se préoccuper de l'anomalie. D'un autre côté, il ne fallait pas s'attendre ici à des coïncidences parfaites, par la raison que la formule (F) est déduite de celle-ci :

$$W^2 = \alpha Ri.$$

Or cette expression de W^2, comme nous l'avons fait observer, ne peut être que le premier terme d'une série. Nous avons pensé qu'on serait plus rapproché de la vérité en posant :

$$W^2 = Ri\left(\alpha + \beta\,(1131 + \beta)\,\sqrt{R}\right).$$

S'il en était effectivement ainsi, la formule (F) deviendrait :

$$U^2 = Ri\left(\alpha + 1131\,\sqrt{R}\right). \qquad \text{(F)}$$

Elle ne changerait pas de forme, mais le coefficient de $\sqrt{R}$ *ne serait plus rigoureusement indépendant de la paroi*, et la valeur 1131 serait un peu trop faible. Par suite, par la manière même dont nous avons trouvé α, les valeurs du tableau n° 7 seraient un peu trop fortes. C'est en effet ce que l'on reconnaît si l'on compare ces valeurs à celles déjà trouvées directement au chapitre précédent (tableau n° 5). Voici le tableau comparatif :

Tableau n° 8.

NATURE DE LA CONDUITE.	VALEURS DE α DÉDUITES	
	DE LA VITESSE moyenne.	DE LA VITESSE. à la paroi.
1	2	3
Fonte chargée de dépôts.	446	402
Fonte nettoyée.	1084	1054
Fonte bien nettoyée.	1197	1094
Fonte neuve.	1335	1368

Les faibles écarts entre les chiffres des colonnes 2 et 3 obtenus par des moyens aussi différents, sont une preuve que nous sommes *près* de la vérité, et la supériorité des chiffres de la colonne 2 (sauf pour la fonte neuve) est un fait à l'appui de l'expression binôme ci-dessus de la vitesse à la paroi.

Si maintenant on veut avoir les coefficients exacts de l'équation qui donne la vitesse moyenne, il suffit de faire un calcul par approximations successives. Nous savons que :

$$U^2 = Ri(\alpha + \beta\sqrt{R}).$$

Dans le tableau n° 7, nous sommes parti de la formule (F), c'est-à-dire de la valeur 1131 comme première approximation du coefficient de $\sqrt{R}$, et nous avons trouvé d'autres valeurs approchées pour α ; servons-nous maintenant de ces dernières pour approcher davantage du coefficient de $\sqrt{R}$, et ainsi de suite. Je ne reproduis pas les calculs qui n'ont pas d'intérêt par eux-mêmes. Je me contente de donner les formules définitives qui expriment la vitesse moyenne dans les tuyaux en fonte neuve et en fonte chargée de dépôts, après avoir légèrement modifié les coefficients trouvés de manière à simplifier autant que possible les chiffres sans altérer sensiblement les résultats.

Ces formules sont :

Pour la fonte avec dépôts :

$$\left(\frac{U}{20.5}\right)^2 = Ri(1 + 3\sqrt{R}). \qquad (F'_1)$$

Pour la fonte neuve :

$$\left(\frac{U}{36.4}\right)^2 = Ri(1 + \sqrt{R}). \qquad (F''_1)$$

Si l'on compare ces formules à celles que donneraient notre première approximation (F), et qui seraient :

Pour la fonte avec dépôts :

$$U^2 = 1131\, Ri(\sqrt{R} + 0.3943), \qquad (f')$$

Pour la fonte neuve :

$$U^2 = 1131\, Ri(\sqrt{R} + 1.1967), \qquad (f'')$$

on voit facilement que les différences ne sont pas considérables ; cependant elles suffisent pour influer sur les résultats des calculs de la vitesse moyenne. C'est donc aux formules (F'_1) et (F''_1) qu'il faudra toujours recourir ; et comme elles sont fondamentales en pratique, je crois devoir, avant d'aller plus loin, les vérifier en mettant en parallèle les résultats qu'elles donnent avec ceux de l'expérience.

Tableau n° 9.

Tuyaux en fonte chargée de dépôts.

Vérification de la formule $\left(\frac{U}{20.5}\right)^2 = Ri\left(1 + 5\sqrt{R}\right)$.

NUMÉROS des expériences. 1	PENTES *i*. 2	VITESSE expérimentale. 3	VITESSE d'après ma formule. 4	VITESSES d'apre la formule empirique de M. Darcy. 5
		D = 0.0359.		
108	0.00025	0.051	0.052	0.050
109	0.00071	0.081	0.092	0.090
110	0.00183	0.130	0.139	0.135
111	0.00670	0.253	0.266	0.258
112	0.01525	0.381	0.401	0.389
113	0.03240	0.551	0.585	0.567
114	0.04153	0.663	0.663	0.642
		D = 0.0795		
122	0.00065	0.123	0.132	0.139
123	0.00250	0.251	0.259	0.273
124	0.00725	0.446	0.442	0.466
125	0.01610	0.678	0.658	0.694
126	0.03100	0.931	0.913	0.963
127	0.04535	1.142	1.106	1.165
		D = 0.2432.		
166	0.00094	0.307	0.315	0.319
167	0.00202	0.452	0.462	0.468
168	0.00473	0.707	0.707	0.717
169	0.01150	1.106	1.101	1.117
170	0.02290	1.547	1.554	1.576
171	0.03200	1.833	1.838	1.864
172	0.04105	2.073	2.082	2.111
173	0.13981	3.833	3.842	3.896

Tableau n° 10.

Conduites en fonte neuve.

Vérification de la formule $\left(\frac{U}{36.04}\right)^2 = Ri(1 \times \sqrt{R})$.

NUMÉROS des expériences. 1	PENTES *i*. 2	VITESSE expérimentale. 3	VITESSE d'après ma formule. 4	VITESSES d'après la formule de M. Darcy. 5
		D = 0.0819		
134	0.00020	0.088	0.111	0.111
135	0.00083	0.171	0.226	0.226
136	0.00232	0.358	0.378	0.378
137	0.00581	0.561	0 573	0.572
138	0.01020	0.791	0.793	0.792
139	0.02235	1.185	1.179	1.178
140	0.03208	1.418	1.407	1.405
141	0.04042	1.571	1.579	1.577
142	0.09547	1.453	2.400	2.396
143	0.09904	2.487	2.416	2.413
144	0.11978	2.720	2.720	2.715
145	0.16807	3.238	3.221	3.216
146	0.17072	3.265	3.247	3.241
		D = 0.137		
147	0.00024	0.149	0.164	0.164
148	0.00087	0.298	0.312	0.312
149	0 00209	0.488	0.484	0.484
150	0.00475	0.763	0.730	0.730
151	0.01260	1.279	1.189	1.188
152	0.02250	2.714	1.589	1.588
153	0.03318	2.098	1.931	1.930
154	0.83905	2.281	2.094	2.093
155	0.09852	3.640	3.325	3.328
156	0.16756	4.693	4.338	4.335
		D = 0.188		
157	0.00027	0.205	0.210	0.208
158	0.00175	0.497	0.533	0.529
159	0.00361	0.758	0.775	0.768
160	0 00805	1.128	1.145	1.135
161	0.01340	1.488	1.479	1.465
162	0.02250	1.933	1.916	1.898
163	0.03810	2.506	2.496	2.471
164	0.10980	4.323	4.245	1.194
165	0.54591	4.928	4.883	4.835
		D = 0.50		
190	0.00045	0.4207	0.487	0.459
191	0.00045	0.4488	0.487	0.459
192	0.00060	0.4752	0.566	0.531
193	0.00120	0.7932	0.799	0.750
194	0.00125	0.7951	0.815	0.766
195	0.00210	1.0412	1.056	0.993
196	0.00230	1.1135	1.110	1.040
197	0.00260	1.1197	1.174	1.104
198	0.00250	1.1278	1.153	1.083

Les tableaux qui précèdent se comprennent d'eux-mêmes. On y a mis en parallèle les vitesses expérimentales, les vitesses obtenues par les formules de M. Darcy et celles de mes propres formules.

Si l'inspection de ces tableaux montre que les formules empiriques de M. Darcy résument très-heureusement les expériences (à de rares exceptions près), le tableau n° 9 fait voir que, sauf pour le tuyau très-petit de 0.0359, mes résultats sont encore plus rapprochés des chiffres expérimentaux (*) que ceux de M. Darcy ; le tableau n° 10 montre aussi qu'à mesure que les diamètres grandissent, mes formules se rapprochent plus de l'expérience que celles de M. Darcy. Je conclus de là que si, dans les limites des expériences, les deux formules peuvent s'appliquer avec une entière et égale sécurité, les miennes méritent une confiance beaucoup plus grande dès que l'on dépassera ces limites. On comprend d'ailleurs que mes résultats, basés sur un certain nombre de données tout à fait rationnelles, doivent se rapprocher bien plus d'une loi exacte que ceux de M. Darcy, qui sont purement empiriques. Mes formules représentent nécessairement une approximation de la réalité : celles de M. Darcy ne donnent que la représen-

(*) Pour ces tuyaux très-petits, il y a quelques écarts aussi bien par les formules de M. Darcy que par les miennes. Cela tient à ce que la loi simple que nous avons déduite des expériences pour le frottement entre deux filets liquides ne peut être qu'un terme d'une série, et ce frottement, au lieu d'être simplement proportionnel à $V \times \frac{dV}{dr}$, comme nous l'avons admis, est plus complétement représenté par l'expression $(a + bV)\frac{dV}{dr}$; quand V est grand, le terme a est négligeable ; quand V est petit, c'est au contraire ce terme qui devient prépondérant, et l'on retombe alors sur l'ancienne loi de Navier. On vérifierait cela très-facilement sur les tuyaux de petit diamètre ; mais comme ces tuyaux sont peu employés et que nous avons déjà de nombreux tableaux de calcul dans ce mémoire, je n'ai pas voulu reproduire la vérification.

tation de ses expériences; mais comme elles conduisent à dire que le frottement entre deux filets liquides est proportionnel au quarré de la vitesse relative, et que cette loi a été démontrée *mathématiquement impossible*, il s'ensuit qu'elles ne peuvent à aucun degré représenter la vérité. Elles sont déjà moins exactes que les miennes à la limite supérieure des expériences, et n'offriront évidemment pas le même degré de certitude quand on franchira le cercle des données qui les a fournies. Or les expériences ne sont faites que pour des tuyaux de 0.50 de diamètre au plus, et même seulement pour des tuyaux de 0.24 de diamètre quand il s'agit de la fonte avec dépôts; pendant qu'on emploie déjà aujourd'hui des tuyaux qui ont jusqu'à 1 mètre de diamètre; nous pensons donc qu'il y aura un réel avantage à mettre nos formules en pratique.

Elles sont d'ailleurs beaucoup plus simples que la formule à deux termes de M. Darcy, qui est de la forme :

$$Ri = \left(\alpha + \frac{\beta}{R}\right) U + \left(\alpha_1 + \frac{\beta_1}{R}\right) U^2,$$

et pour le moins aussi simple que la formule à un terme :

$$Ri = \left(0.000507 + \frac{0.00000647}{R}\right) U^2 = b_1 U^2.$$

J'observe d'ailleurs que les formules de M. Darcy ne s'appliquent directement qu'à la fonte neuve. M. Darcy n'a pas donné une formule distincte pour la fonte recouverte de dépôts. Seulement, pour les applications relatives à ce dernier genre de conduites, il donne les deux règles pratiques suivantes que je reproduis textuellement (page 228) :

« Si l'on veut en faire usage (des formules) pour les conduites déjà anciennes, dans lesquelles le poli des surfaces est altéré par de légers dépôts ou par l'oxydation de

la fonte, il faudra avoir égard aux observations faites dans le chapitre IV.

« *Première observation.* — Lorsque l'on recherchera la pente correspondante à une vitesse déterminée, il conviendra de doubler cette pente, ou, si la pente est donnée, de la diviser par 2, et de ne compter que la vitesse correspondante au quotient de cette division. »

« *Deuxième observation.* — Mais indépendamment de ce retard provenant des aspérités des parois, il existe une autre cause qui affaiblit le volume de l'écoulement ; elle est due à l'épaisseur de la couche déposée.

« Pour y remédier, il importe, suivant la nature des eaux à conduire, d'augmenter les diamètres trouvés d'une certaine quantité d'autant plus nécessaire à ajouter que les diamètres sont plus faibles.

« Il est évident que dans le calcul des diamètres de conduites à établir pour une fourniture d'eau, il faudra agir comme si les conduites étaient recouvertes de dépôts, puisque ce résultat aura lieu infailliblement au bout d'un certain nombre d'années. »

La première de ces règles n'est pas rigoureusement exacte. Elle revient à remplacer dans la formule précitée de M. Darcy :

$$Ri = \left(0.000507 + \frac{0.00000647}{R}\right) U^2 = b_1 U^2,$$

la pente i par $\frac{i}{2}$; et elle est fondée snr ce que le coefficient $b_1 = \frac{Ri}{U^2}$, que M. Darcy appelle coefficient de résistance, serait, pour la fonte recouverte de dépôts, double de ce qu'il est pour la fonte neuve.

Cette remarque a été faite par M. Darcy sur deux tuyaux, l'un en fonte neuve de 0.188 de diamètre, l'autre en fonte recouverte de dépôts de 0.2432 de diamètre, et voici les résultats obtenus :

Tableau n° 11 *extrait de l'ouvrage de* M. DARCY.

COEFFICIENTS DE RÉSISTANCE.	FONTE NEUVE : D = 0.188	FONTE RECOUVERTE de dépôts. D = 0.2432
Coefficient de résistance....	0.000584393	0.001167779

On voit en effet que le rapport des deux coefficients de résistance est très-sensiblement 1/2 : cela est vrai pour les deux conduites particulières considérées ; mais cela ne serait plus tout à fait exact pour deux autres conduites de même nature, *mais de diamètres différents.* Pour que la propriété fût indépendante des diamètres, il faudrait que les deux coefficients qui entrent dans l'expression de b_1 changeassent dans la même proportion lorsqu'on passe d'une nature de conduite à une autre. Or il n'en est pas ainsi. Cela résulte de mes formules, soit qu'on prenne les formules de première approximation (l') et l''), soit les formules définitives. Ces dernières donnent :

Pour le coefficient de résistance de la fonte neuve (*) :

$$\frac{Ri}{U^2} = \frac{1}{(36.4)^2\left(1+\sqrt{R}\right)},$$

et pour la fonte avec dépôts :

$$\frac{Ri}{U^2} = \frac{1}{(20.5)^2\left(1+3\sqrt{R}\right)}.$$

Et leur rapport dépend du rayon. Dans les tuyaux employés dans la pratique, c'est-à-dire variant de 0.08 à 1 mètre de diamètre, ce rapport varie de 0.42 à 0.57.

(*) Je prends ici le terme de M. Darcy, bien que, comme nous l'avons vu au chapitre V, je n'attache pas le même sens à cette expression.

Mais on s'explique comment, pour les diamètres particuliers qu'il a considérés, M. Darcy a dû arriver au résultat qu'il a énoncé.

Faisons en effet :

Pour la fonte neuve : $R = \frac{0.188}{2}$, nous aurons : $\frac{Ri}{U^2} = 0.0005776$.

Et pour la fonte avec dépôts : $R = \frac{0.2452}{2}$, nous aurons : $\frac{Ri}{U^2} = 0.001225$.

Ces chiffres sont tout à fait semblables à ceux qu'a obtenus M. Darcy (tableau n° 11), et leur rapport est sensiblement 1/2.

Examinons maintenant les conséquences qu'aurait, dans la pratique, l'emploi de la règle énoncée par M. Darcy. Elle consiste à substituer, pour la fonte avec dépôts, à la formule

$$\left(\frac{U}{20.50}\right)^2 = Ri(1 + 3\sqrt{R}),$$

celle-ci :

$$\left(\frac{U}{36.4}\right)^2 = \frac{Ri}{2}(1 + \sqrt{R}).$$

Appelons U' les valeurs données par cette dernière formule, nous aurons :

$$\frac{U}{U'} = \frac{20.5\sqrt{2}\sqrt{1 + 3\sqrt{R}}}{36.4\sqrt{1 + \sqrt{R}}},$$

ou

$$\frac{U}{U'} = 0.796\sqrt{\frac{1 + 3\sqrt{R}}{1 + \sqrt{R}}}.$$

Ce rapport a les valeurs suivantes :

Pour	R = 0.	0.796
—	R = 0.04	0.92
—	R = 0.25	1.025
—	R = 0.50	1.122

On voit donc qu'en deçà du diamètre de 0.50 le rapport $\frac{U}{U'}$ est au-dessous de l'unité, et qu'au-dessus de ce diamètre il dépasse l'unité, c'est-à-dire qu'en deçà de 0.50, la valeur U', donnée par la règle de M. Darcy, est légèrement trop forte, et au delà elle est trop faible. Cette dernière circonstance n'a pas d'inconvénient : il vaut toujours mieux connaître les vitesses par défaut que par excès; on évite ainsi tout mécompte. Mais il y a inconvénient à trouver des vitesses trop fortes pour les tuyaux de petit diamètre qui s'engorgent facilement, et où il y a toujours plutôt des causes de diminution que d'augmentation dans la vitesse. Je crois donc qu'il est préférable d'avoir une formule directe pour la fonte avec dépôts. Cette formule, je l'ai réduite en une table à simple entrée au chapitre I, et j'ai montré comment cette table permet de résoudre les six problèmes que soulèvent les conduites simples.

Quand on aura terminé tous les calculs relatifs à une distribution d'eau, on augmentera légèrement les diamètres trouvés pour tenir compte de l'espace qu'occuperont les dépôts qui se formeront à l'intérieur des conduites. Mais il ne sera pas nécessaire, suivant la première règle de M. Darcy, tantôt de multiplier, tantôt de diviser par 2 les pentes que l'on trouvera, sujétion pénible et pouvant causer des erreurs dans des calculs déjà très-longs par eux-mêmes.

La table que j'ai donnée pourra s'employer avec sécurité pour tous les diamètres supérieurs à $0^{m}.04$, c'est-à-dire pour tous ceux employés; j'estime, au contraire, que

les formules de M. Darcy deviennent inexactes pour la fonte neuve à partir du tuyau de 0.50 de diamètre et pour la fonte avec dépôts, c'est-à-dire celle que l'on doit toujours supposer quand on fait les calculs d'une fourniture d'eau, à partir du diamètre de $0^m.24$.

Montauban, le 18 avril 1866.

N° 152

MÉMOIRE

Sur la flexion des entretoises et du bordage dans les portes d'écluse.

Par M. LAVOINNE, ingénieur des ponts et chaussées.

EXPOSÉ.

1. M. V. Chevallier a publié dans les *Annales des ponts et chaussées*, année 1850, un mémoire remarquable sur la construction des portes d'écluse à bordage vertical.

D'un grand nombre d'expériences dont les résultats sont consignés dans son mémoire, il a fait ressortir l'influence qu'exercent l'épaisseur du bordage vertical et l'espacement des entretoises sur la répartition des charges entre les entretoises, et il est arrivé à conclure que ces dernières pièces devaient être également espacées.

L'objet de ce mémoire est de montrer que l'application de la théorie de la résistance des matériaux suffit pour rendre compte de cette influence, et permet de plus de calculer exactement les charges supportées par chacune des entretoises et par le bordage vertical lui-même dans les différents cas de la pratique.

CHAPITRE PREMIER.

PROBLÈME GÉNÉRAL.

2. Nous nous proposerons d'abord de résoudre d'une manière générale le problème suivant :

Étant donnée (Pl. 134, *fig.* 1) une série de pièces droites

A_0R_0, A_1R_1,.... A_kR_k, A_sR_s, supportées à leurs extrémités par des appuis fixes situés sur deux lignes perpendiculaires à leur direction, et reliées par des traverses perpendiculaires B_0B_s, C_0C_s,... M_0M_s, sur lesquelles agissent des forces quelconques normales au plan de l'ensemble des pièces, il s'agit de déterminer les moments fléchissants des diverses pièces en chaque point de leur longueur.

Pour résoudre ce problème, nous remarquerons d'abord que la flèche prise sous l'action des charges, par les traverses B_oB_s, C_oC_s..., et les entretoises A_0R_0, A_1R_1.... à chacun de leurs points de croisement, est la même ; qu'en outre, la figure de la fibre moyenne de chaque pièce ne peut comprendre que des parties de courbes se raccordant entre elles, sans quoi il y aurait des points où il se produirait une flexion infinie, ou, en d'autres termes, une véritable rupture de la pièce ; que, d'autre part, chaque traverse, à son point de croisement avec une entretoise, lui transmet une partie de la charge qu'elle supporte, et que l'entretoise exerce, de son côté, sur la traverse, une réaction égale et contraire.

Cela posé, désignons par R_{M_k} la réaction qui se développe au point de croisement de la traverse M_oM_s avec le longeron A_kR_k, en donnant en général comme indice aux réactions les lettres qui définissent les points de croisement.

La flèche que prend le longeron A_kR_k, au point M_k, est une fonction des diverses réactions qui se produisent aux points B_kC_k... M_k. Il est évident que, si ces réactions au nombre de p (p étant le nombre des traverses) étaient connues, les flèches en ces différents points seraient connues également.

Mais pour l'une quelconque des traverses, telles que M_oM_s, par exemple, la flèche en chaque point de croisement de cette traverse avec un longeron, est une fonction des réactions, R_{M_o}, R_{M_1},... R_{M_s}, des forces extérieures agis-

sant sur cette traverse, de la flèche prise par la traverse en M_0, et du coefficient angulaire de la tangente à la courbe de la fibre moyenne de la traverse au même point.

En égalant donc les flèches des traverses et des longerons à leurs points de croisement, on aura un nombre pq (q étant le nombre des longerons) entre $p(q+2)$ inconnues, savoir :

1° Les pq réactions telles que R_{m_k};

2° Les p flèches aux points B_0, C_0... M_0 ;

3° Les p coefficients angulaires des tangentes aux courbes des fibres moyennes des traverses aux mêmes points.

A ces pq équations viendront s'ajouter celles qu'on obtient en égalant à zéro la somme de toutes les forces extérieures agissant sur chaque traverse, et la somme des moments des mêmes forces pris par rapport à un point quelconque de la traverse, c'est-à-dire $2p$ autres équations.

On aura donc, en définitive, un nombre d'équations égal au nombre des inconnues, qui se trouveront ainsi toutes déterminées. De la connaissance des réactions, on déduira ensuite facilement celle des moments fléchissants en chaque point, soit d'une entretoise, soit d'une traverse.

Si les charges et les traverses sont réparties d'une manière irrégulière, on conçoit que la multiplicité des équations puisse en rendre la résolution très-laborieuse. Mais, dans les cas usuels, cette répartition suit le plus souvent des lois simples ; dans le cas des portes d'écluse, par exemple, la charge est uniforme à la hauteur de chaque entretoise, et varie uniformément, suivant la hauteur, à partir du niveau de l'eau. Nous allons voir que les calculs se simplifient alors assez pour conduire, sans trop de difficulté, à la connaissance des moments fléchissants dans les entretoises, qui est en définitive le but principal du problème.

CHAPITRE II.

CAS GÉNÉRAL D'UN NOMBRE QUELCONQUE D'ENTRETOISES SUPPORTANT UN BORDAGE PERPENDICULAIRE A LEUR DIRECTION ET CONTINU SUR LEQUEL AGISSENT, LE LONG DE LIGNES PARALLÈLES AUX ENTRETOISES, DES CHARGES UNIFORMES.

3. Nous rappellerons d'abord, qu'étant donnée une poutre droite de section uniforme chargée transversalement, la fibre moyenne de la poutre, primitivement droite, prendra, sous l'action des charges, une figure courbe dont l'équation, donnée par les divers traités sur la résistance des matériaux, peut s'écrire ainsi qu'il suit :

$$(1) \qquad \frac{er^2 d^2y}{dx^2} = \mathrm{X},$$

en désignant par y la flèche en un point quelconque d'abscisse x, par er^2 le moment de flexibilité du solide, ou le produit du coefficient d'élasticité de la matière par le moment d'inertie de la section transversale de la pièce, et par X la somme des moments de toutes les forces extérieures agissant sur la pièce, pris par rapport au point de la fibre moyenne dont l'abscisse est x.

On regarde comme négligeable le glissement transversal que tendent à produire en chaque point les forces extérieures, et l'on ne tient compte que de l'effet dû à la flexion proprement dite.

4. Soit maintenant (*fig.* 2) une série d'entretoises parallèles M_0N_0, M_1N_1... M_pN_p... M_sN_s, sur lesquelles est appliqué un bordage continu, infiniment mince, dans le sens de la longueur des entretoises, et perpendiculaire à leur direction. Supposons que sur une ligne mn parallèle aux entretoises, et située à une distance d de l'entretoise M_0N_0,

agisse une charge uniforme p. Désignons par $2a$ la portée commune des entretoises, par $b_1 b_2 \dots b_s$ les distances des entretoises M_1N_1, M_2N_2,... M_sN_s à l'entretoise supérieure, par m_0, m_1, m_2.... m_s ce que nous avons désigné tout à l'heure par er^2 dans la formule générale (1), pour les diverses entretoises, par μ la même quantité pour 1 mètre courant de largeur de bordage, par x et z les cordonnées Q_0N_0 et Q_0O d'un point quelconque de la face du bordage en contact avec les entretoises.

Sous l'influence de la charge, les divers points de cette face de contact s'écarteront de leurs positions primitives. Soit y le déplacement de l'un quelconque de ces points mesuré perpendiculairement au plan de la face de contact primitive, et soient π_0, π_1, π_2... π_s les réactions, rapportées à l'unité de longueur d'entretoise en chaque point, qui se développeront aux points de croisement de chaque bordage infiniment mince avec une entretoise, π_0, π_1, π_2... π_s étant des fonctions de x qu'il s'agit de déterminer.

5. Si nous considérons d'abord un bordage quelconque infiniment mince Q_0Q_s, soumis au point q à la charge $p\,dx$, aux points Q_0, Q_1... Q_s, à l'action des réactions $\pi_0 dx$, $\pi_1 dx$,... $\pi_s dx$, l'équation générale des moments fléchissants, rappelée au § 3, donnera en chaque point de ce bordage, après suppression du facteur commun dx, l'équation

$$\mu \frac{d^2y}{dz^2} = -\pi_0 z,$$

pour le premier intervalle Q_0Q_1.

Dans le second intervalle, cette équation sera remplacée par :

$$\mu \frac{d^2y}{dz^2} = -\pi_0 z - \pi_1 (z - b_1),$$

jusqu'au point où agit la force p; à partir de ce point, s'il

est situé dans l'intervalle Q_1Q_2, comme le suppose la figure, l'équation devient :

$$\mu \frac{d^2y}{dz^2} = -\pi_0 z - \pi_1(z - b_1) + p(z - d),$$

Dans l'intervalle $Qp\ Qp+1$, on aura :

$$\mu \frac{d^2y}{dz^2} = -\pi_0 z - \pi_1 (z - b) \ldots\ldots -\pi_p(z - b_p) + p(z - d),$$

la première équation où apparaît le terme $p(z-d)$, étant en général l'équation où l'on a $b_i < d < b_{i+1}$, i étant l'indice de l'origine de l'intervalle.

Dans le dernier intervalle, on aura :

$$\mu \frac{d^2y}{dz^2} = -\pi_0 z - \pi_1 (z - b_1) \ldots\ldots - \pi_{s-1} (z - b_{s-1}) + p(z - d).$$

Si l'on intègre deux fois ces équations différentielles par rapport à z, et que l'on désigne par y_0 la flèche du bordage en Q_0, et par t_0 le coefficient angulaire de la tangente, en ce point, à la figure que prend ledit bordage dans sa nouvelle position, on obtient les équations :

$$y = -\frac{\pi_0 z^3}{6\mu} + t_0 z + y_1,$$

$$y = -\frac{\pi_0 z^3}{6\mu} - \frac{\pi_1 (z - b_1)^3}{6\mu} + t_0 z + y_0,$$

$$y = -\frac{\pi_0 z^3}{6\mu} - \frac{\pi_1 (z - b_1)^3}{6\mu} + \frac{p(z-d)^3}{6\mu} + t_0 z + y_0,$$

. . . .

$$y = -\frac{\pi_0 z^3}{6\mu} - \frac{\pi_1(z - b_1)^3}{6\mu} \ldots - \frac{\pi_p(z - b_p)^3}{6\mu} + \frac{p(z-d)^3}{6\mu} + t_0 z + y_0,$$

. . . .

$$y = -\frac{\pi_0 z^3}{6\mu} - \frac{\pi_1 (z - b_1)^3}{6\mu} \ldots - \frac{\pi_p (z - b_p)^3}{6\mu} \ldots - \pi_{s-1} \frac{(z - b_{s-1})^3}{6\mu} +$$

$$+ \frac{p(z - d)^3}{6\mu} + t_0 z + y_0,$$

pour les divers intervalles successifs, en ayant égard à ce que, aux extrémités des intervalles successifs, il y a raccordement entre les courbes composant la nouvelle figure que prend l'axe neutre du bordage, primitivement rectiligne.

On déduit de ces formules, pour les flèches ou déplacements, $f_0, f_1, f_2 \dots f_n$ du bordage aux points $Q_0, Q_1 \dots Q_s$, les valeurs suivantes :

$$f_0 = y_0,$$

$$f_1 = -\frac{\pi_0 b_1^3}{6\mu} + t_0 b_1 + f_0,$$

$$f_2 = -\frac{\pi_0 b_2^3}{6\mu} - \frac{\pi_1 (b_2 - b_1)^3}{6\mu} + \frac{p(b_2 - d)^3}{6\mu} + t_0 b_2 + f_0.$$

. . . .

$$f_{p+1} = -\frac{\pi_0 b^3_{p+1}}{6\mu} - \frac{\pi_1 (b_{p+1} - b_1)^3}{6\mu} \dots - \frac{\pi_p (b_{p+1} - b_p)^3}{6\mu} + \\ + \frac{p (b_{p+1} - d)^3}{6\mu} + t_0 b_{p+1} + y_0,$$

. . . .

$$f_s = -\frac{\pi_0 b_s^3}{6\mu} - \frac{\pi_1 (b_s - b_1)^3}{6\mu} \dots\dots - \frac{\pi_p (b_s - b_p)^3}{6\mu} \dots\dots - \\ - \frac{\pi_{s-1} (b_s - b_{s-1})^3}{6\mu} + \frac{p (b_s - d)^3}{6\mu} + t_0 b_s + y_0.$$

La première de ces équations qui contient p dans son second membre, étant celle pour laquelle on a $b_i > d$, i étant l'indice de f.

6. Passons maintenant aux entretoises. Dans une entretoise quelconque, celle d'indice p, par exemple, si l'on désigne par x_1 la distance à la première section M_p d'un point quelconque de cette entretoise, situé entre celui dont l'abscisse est x et l'extrémité de la pièce, l'équation des moments fléchissants déjà appliquée aux bordages donnera :

$$m_p \frac{d^2 y}{dx^2} = \int_0^x (x - x_1) \pi_p dx_1 - x \int_0^a \pi_p dx,$$

π_p devant être considéré dans cette équation comme une fonction de x.

Or on peut écrire :

$$\int_0^x (x-x_1)\pi_p dx_1 = x\int_0^x \pi_p dx_1 - \int_0^x \pi_p x_1 dx_1,$$

et l'on a :

$$\int_0^x \pi_p x_1 dx_1 = \int_0^x \pi_p x dx = x\int_0^x \pi_p dx - \int_0^x dx\int_0^x \pi_p dx;$$

d'où l'on tire :

$$\int_0^x (x-x_1)\,\pi_p dx_1 = \int_0^x dx\int_0^x \pi_p dx.$$

On peut donc écrire l'équation des moments fléchissants ainsi qu'il suit :

$$m_p \frac{d^2y}{dx^2} = \int_0^x dx\int_a^x \pi_p dx,$$

équation d'où l'on tire par deux intégrations successives, en remarquant qu'on a $\frac{dy}{dx} = 0$ pour $x = a$ et $y = 0$ pour $x = 0$:

$$y = \frac{1}{m_p}\int_0^x dx\int_a^x dx\int_0^x dx\int_a^x \pi_p dx.$$

7. Aux points de croisement des bordages avec les entretoises, on aura donc les équations :

$$f_0 = \frac{1}{m_0}\int_0^x dx\int_a^x dx\int_0^x dx\int_a^x \pi_0 dx$$

$$f_1 = -\frac{\pi_0 b_1^3}{6\mu} + t_0 b_1 + f_0 = \frac{1}{m_1}\int_0^x dx\int_a^x dx\int_0^x dx\int_a^x \pi_1 dx$$

$$f_2 = -\frac{\pi_0 b_2^3}{6\mu} - \frac{\pi_1 (b_2-b_1)^3}{6\mu} + \frac{p\,(b_2-d)^3}{6\mu} + t_0 b_2 + f_0 =$$

$$= \frac{1}{m_2}\int_0^x dx\int_a^x dx\int_0^x dx\int_a^x \pi_2 dx$$

. . . .

$$f_{p+1} = \frac{\pi_0 b^3_{p+1}}{6\mu} - \frac{\pi_1 (b_{p+1} - b_1)^3}{6\mu} \dots - \frac{\pi_p (b_{p+1} - b_p)^3}{6\mu} +$$
$$+ \frac{p(b_{p+1} - d)^3}{6\mu} + t_0 b_{p+1} + f_0 = \frac{1}{m_{p+1}} \int_0^x dx \int_a^x dx \int_0^x dx \int_a^x \pi_{p+1} dx$$

. . . .

$$f_s = -\frac{\pi_0 b_s^3}{6\mu} - \frac{\pi_1 (b_s - b_1)^3}{6\mu} \dots - \frac{\pi_s (b_s - b_{s-1})^3}{6\mu} + \frac{p(b_s - d)^3}{6\mu} +$$
$$+ t_0 b_s + f_0 = \frac{1}{m_s} \int_0^x dx \int_a^x dx \int_0^x dx \int_a^x \pi_s dx,$$

équations auxquelles on devra joindre les équations suivantes, obtenues en écrivant que la somme de toutes les forces agissant sur chaque bordage infiniment mince, prises avec leurs signes respectifs, est nulle, ainsi que la somme de leurs moments pris par rapport à l'axe de l'entretoise extrême M_0N_0 :

$$(2) \qquad \begin{cases} \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \dots + \pi_s = p \\ \pi_1 b_1 + \pi_2 b_2 + \dots + \pi_s b_s = pd. \end{cases}$$

Nous avons ainsi en totalité $s+3$ équations contenant $s+3$ inconnues, savoir les $s+1$ réactions π_0, π_1, ... π_s et les deux quantités t_0 et f_0.

Nous commencerons par éliminer ces deux dernières quantités entre les $s+1$ premières équations ; on obtiendra ainsi les nouvelles équations :

$$
(3)\left\{
\begin{aligned}
&\frac{\pi_0 b_2 b_1 (b_2^2-b_1^2)}{6\mu}+\frac{\pi_1(b_2-b_1)^3 b_1}{6\mu}-\frac{p}{6\mu}[b_1(b_2-d)^3-b_2(b_1-d)^3]\\
&=\int_0^x dx\int_a^x dx\int_0^x dx\int_a^x dx\left[\left(\frac{\pi_2}{m_2}-\frac{\pi_0}{m_0}\right)b_1-\left(\frac{\pi_1}{m_1}-\frac{\pi_0}{m_0}\right)b_2\right]\\
&\frac{\pi_0 b_1 b_3 (b_3^2-b_1^2)}{6\mu}+\frac{\pi_1(b_3-b_1)^3 b_1}{6\mu}+\frac{\pi_2(b_3-b_2)^3 b_1}{6\mu}-\\
&\qquad -\frac{p}{6\mu}[b_1(b_3-d)^3-b_3(b_1-d)]^3=\\
&=\int_0^x dx\int_a^x dx\int_0^x dx\int_a^x dx\left[\left(\frac{\pi}{m_3}-\frac{\pi_0}{m_0}\right)b_1-\left(\frac{\pi_1}{m_1}-\frac{\pi_0}{m_0}\right)b_3\right]\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\frac{\pi_0 b_p b_1 (b_p^2-b_1^2)}{6\mu}+\frac{\pi_1(b_p-b_1)^3 b_1}{6\mu}+\ldots+\frac{\pi_{p-1}(b_p-b_{p-1})^3 b_1}{6\mu}\\
&\qquad -\frac{p}{6\mu}[b_1(b_p-d)^3-b_p(b_1-d)^3)\\
&=\int_0^x dx\int_a^x dx\int_0^x dx\int_a^x dx\left[\left(\frac{\pi_p}{m_p}-\frac{\pi_0}{m}\right)b_1-\left(\frac{\pi_1}{m_1}-\frac{\pi_0}{m_0}\right)b_p\right]\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\frac{\pi_0 b_s b_1 (b_s^2-b_1^2)}{6\mu}+\frac{\pi_1(b_s-b_1)^3 b_1}{6\mu}+\ldots+\frac{\pi_{s-1}(b_s-b_{s-1})^3 b_1}{6\mu}\\
&\qquad -\frac{p}{6\mu}[b_1(b_s-d)^3-b_s(b_1-d)^3]\\
&=\int_0^x dx\int_a^x dx\int_0^x dx\int_a^x dx\left[\left(\frac{\pi_s}{m_s}-\frac{\pi_0}{m_0}\right)b_1-\left(\frac{\pi_1}{m_1}-\frac{\pi_0}{m_0}\right)b_s\right],
\end{aligned}
\right.
$$

le terme en $b_p\,(b_1-d)^3$ qui forme en partie le coefficient de $\frac{p}{6\mu}$ dans le premier membre de ces équations n'existant toutefois qu'autant que l'on a $d < b$.

En éliminant ensuite deux des quantités π_0, $\pi_1 \ldots\ldots \pi_s$, par exemple π_s et π_{s-1} entre ces équations et les équations (2), on n'aura plus que $s-1$ inconnues à rechercher au moyen de $s-1$ équations dont les deux dernières seulement différeront de celles du même rang dans les précédentes.

Les deux dernières équations nouvelles seront :

$$\frac{\pi_0 b_{s-1} b_1 (b^2_{s-1}-b_1^2)}{6\mu}+\frac{\pi_1(b_{s-1}-b_1)^3 b_1}{6\mu}+\ldots+\frac{\pi_{s-2}(b_{s-1}-b_{s-2})^3 b_1}{6\mu}-$$

$$-\frac{p}{6\mu}[b_1(b_{s-1}-d)^3-b_{s-1}(b_1-d)^3]=\int_0^x dx\int_a^x dx\int_0^x dx\int_a^x dx$$

$$\Big\{-\pi_0\left[\frac{b_s b_1}{m_{s-1}(b_s-b_{s-1})}-\frac{b_{s-1}-b_1}{m_0}\right]-\pi_1\left[\frac{b_s-b_1)b_1}{m_{s-1}(b_s-b_{s-1}}+\frac{b_{s-1}}{m_1}\right]-$$

$$-\frac{\pi_2(b_s-b_2)b_1}{m_{s-1}(b_s-b_{s-1})}-\ldots-\frac{\pi_{s-2}(b_s-b_{s-2})b_1}{m_{s-1}(b_s-b_{s-1})}+\frac{p(b_s-d)b_1}{m_{s-1}(b_s-b_{s-1}}\Big\},$$

et

$$\frac{\pi_0 b_s b_1}{6\mu}[b_s^2-b_1^2+(b_s-b_{s-1})^2]+\frac{\pi_1}{6\mu}(b_s-b_1)b_1[(b_s-b_1)+$$

$$+(b_s-b_{s-1})^2]+\ldots+\frac{\pi_{s-2}}{6\mu}(b_s-b_{s-2})b_1[(b_{s-2}^2+(b_s-b_{s-1})^2]-$$

$$-\frac{p}{6\mu}[b_1(b_s-d)^3-b_s(b_1-d)^3-b_1(b_s-b_{s-1})^2(b_s-d)]=$$

$$=\int_0^x dx\int_a^x dx\int_0^x dx\int_a^x dx\Big\{\pi_0\left[\frac{b_{s-1}b_1}{m_s(b_s-b_{s-1})}+\frac{b_s-b_1}{m_0}\right]+$$

$$+\pi_1\left[\frac{b_{s-1}-b_1}{m_s(b_s-b_{s-1})}-\frac{b_s}{m_1}\right]+\frac{\pi_2(b_{s-1}-b_2)b_1}{m_s(b_s-b_{s-1})}+\ldots$$

$$+\frac{\pi_{s-2}(b_{s-1}-b_{s-2})b_1}{m_s(b_s-b_{s-1})}+\frac{p(b_{s-1}-d)b_1}{m_s(b_s-b_{s-1})}\Big\}.$$

Ces $s-1$ équations se présentent sous la forme :

$$(4)\left\{\begin{array}{l}
A'_0\pi_0+A'_1\pi_1+C'=\iiiint M'\pi_0+M_1'\pi_1+M_2'\pi_2\\
A_0''\pi_0+A_1''\pi_1+A_2''\pi_2+C''=\iiiint M''\pi_0+M_1''\pi_1+M_3'''\pi_3\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
A_0^{s-2}\pi+A_1^{s-2}\pi_1+\ldots+A_{s-2}^{s-2}\pi_{s-2}+C^{s-2}=\iiiint M_0^{s-2}\pi_0+\\
\qquad+M_1^{s-2}+\pi_1 M_2^{s-2}\pi_2+\ldots+M_{s-1}^{s-2}\pi_{s-2}+D^{s-2}\\
A_0^{s-1}\pi_0+A_1^{s-1}\pi_1+\ldots+A_{s-2}^{s-1}\pi_{s-2}+C^{s-1}=\iiiint M_0^{s-1}\pi_0+\\
\qquad+M_1^{s-1}\pi_1+M_2^{s-1}\pi_2+\ldots+M_{s-1}^{s-1}\pi_{s-2}+D^{s-1}
\end{array}\right.$$

en désignant la quadruple intégrale par le signe $\iiiint$.

8. Pour résoudre ces équations, on posera :

$$\pi_i = \varphi_i + \Sigma P_i e^{\frac{\Omega}{x}},$$

$\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2 \ldots, \varphi_i \ldots, \varphi_{s-1}$, devant satisfaire aux équations :

$$(5)\quad \begin{cases} M'\varphi_0 + M'_1\varphi_1 + M'_2\varphi_2 = 0, \\ M''\varphi_0 + M''_1\varphi_1 + M'''_3\varphi_3 = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ M_0^{s-1}\varphi_0 + M_1^{s-1}\varphi_1 + \ldots + M_{s-1}^{s-1}\varphi_{s-2} + D^{s-1} = 0, \end{cases}$$

obtenues en égalant à zéro les seconds nombres des équations précédentes, et Ω devant satisfaire aux équations obtenues en prenant 4 fois de suite les dérivées des membres des mêmes équations, ce qui donnera, en supprimant les facteurs $e^{\frac{x}{\Omega}}$ communs dans les deux membres :

$$(6)\quad \begin{cases} \frac{1}{\Omega^4}\left\{A'_0P_0 + A'_1P_1\right\} = M'_0P_0 + M'_1P_1 + M'_2P_2, \\ \frac{1}{\Omega^4}\left\{A''_0P_0 + A''_1P_1 + A''_2P_2\right\} = M''_0P_0 + M''_1P_1 + \\ \qquad + M''_2P_2 + M''_3P_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{1}{\Omega^4}\left\{A_0^{s-2}P_0 + A_1^{s-2}P_1 + \ldots + A_{s-2}^{s-2}P_{-2}\right\} = M_0^{s-2}P_0 + \\ \qquad + M_1^{s-2}P_1 + \ldots + M_{s-1}^{s-2}P_{s-2}, \\ \frac{1}{\Omega^4}\left\{A_0^{s-1}P_0 + A_1^{s-1}P_1 + \ldots + A_{s-2}^{s-1}P_{s-2}\right\} = M_0^{s-1}P_0 + \\ \qquad + M_1^{s-1}P_1 + \ldots + M_{s-1}^{s-1}P_{s-2}. \end{cases}$$

L'élimination des rapports $\frac{P_1}{P_0}, \frac{P_2}{P_0} \ldots \frac{P_{s-2}}{P_0}$ entre ces équa-

tions conduira à une équation ne contenant plus que l'inconnue Ω^4 et du degré $\left(\frac{1}{\Omega^4}\right)^{s-1}$.

On pourrait se proposer de rechercher si les racines de cette équation sont toujours réelles, ou, si elles ne le sont pas toujours, dans quels cas elles le sont, et, lorsqu'elles sont réelles, avec quels signes elles se présentent. Nous ne ferons pas cette recherche; et comme nous aurons lieu de constater plus loin que, dans les cas de la pratique, ces racines sont généralement toutes réelles et négatives, nous nous renfermerons dans cette dernière hypothèse.

Or la fonction $Pe^{\frac{x}{\Omega}}$, lorsque Ω est l'une des racines imaginaires de l'équation

$$\Omega^4 + \frac{1}{\Omega'^4} = 0,$$

$-\Omega'^4$ étant l'une des racines négatives, peut s'écrire:

$$(7) \qquad Pe^{\frac{x}{\Omega}} = e^{\frac{a-x}{\omega}}\left(B\cos\frac{x-a}{\omega} + C\sin\frac{x-a}{\omega}\right) + \\ + e^{-\frac{x-a}{\omega}}\left(D\cos\frac{x-a}{\omega} + E\sin\frac{x-a}{\omega}\right),$$

ω étant déterminé par la condition:

$$\omega^4 = -4\Omega^{\frac{1}{4}},$$

et B, C, D, E étant des constantes qu'il s'agit de déterminer.

Il serait d'ailleurs facile de vérifier *à posteriori* que l'un des termes quelconques composant le deuxième membre de l'équation (7), celui dont le coefficient numérique est B par exemple, combiné avec un système de valeurs de B qu'on obtiendra en portant à la place de Ω^4 dans le $s-1$ équations (6) l'une des valeurs trouvées, et en déduisant les valeurs des rapports des diverses quantités P_1, $P_2, \ldots$, P_{s-2} à

l'une d'elles, par exemple, à P_0, rapports que l'on prendra aussi pour ceux des quantités maintenant désignées par B entre elles, satisfait aux équations différentielles posées précédemment.

9. Il ne reste plus qu'à déterminer les valeurs d'un des coefficients B, B_0 par exemple, pour chaque valeur de Ω, et celles des coefficients C, D, E de même indice.

On remarquera d'abord qu'à cause de la symétrie des charges et des entretoises par rapport au milieu de la portée, la fonction qui forme le deuxième membre des équations (7) doit rester la même lorsqu'on change $x-a$ en $a-x$, ce qui exige que l'on ait :

$$D = B, \quad E = -C$$

d'où l'on tire pour cette fonction que nous désignerons par $f(x)$:

$$f(x) = B\left(e^{\frac{x-a}{\omega}} + e^{-\frac{x-a}{\omega}}\right)\cos\frac{x-a}{\omega} + \\ + C\left(e^{\frac{x-a}{\omega}} - e^{-\frac{x-a}{\omega}}\right)\sin\frac{x-a}{\omega}.$$

Pour satisfaire d'autre part aux équations (4) différentiées deux fois par rapport à x, on sera conduit à poser pour $x = 0$:

$$\frac{d^2\pi_i}{dx^2} = 0;$$

d'où l'on tirera :

$$B\sin\frac{a}{\omega}\left(e^{\frac{a}{\omega}} - e^{-\frac{a}{\omega}}\right) - C\cos\frac{a}{\omega}\left(e^{\frac{a}{\omega}} + e^{-\frac{a}{\omega}}\right) = 0;$$

d'où

$$C = B\,\mathrm{tang}\frac{a}{\omega}\,\frac{e^{\frac{a}{\omega}} - e^{-\frac{a}{\omega}}}{e^{\frac{a}{\omega}} + e^{-\frac{a}{\omega}}}.$$

On pourra donc écrire :

$$(8)\ f(x)=$$

$$\left.\frac{\left(e^{\frac{a}{\omega}}+e^{-\frac{a}{\omega}}\right)\cos\frac{a}{\omega}\left(e^{\frac{x-a}{\omega}}+e^{-\frac{x-a}{\omega}}\right)\cos\frac{x-a}{\omega}+\left(e^{\frac{a}{\omega}}-e^{-\frac{a}{\omega}}\right)\sin\frac{a}{\omega}\left(e^{\frac{x-a}{\omega}}-e^{-\frac{x-a}{\omega}}\right)\sin\frac{x-a}{\omega}}{\cos\frac{a}{\omega}\left(e^{\frac{a}{\omega}}+e^{-\frac{a}{\omega}}\right)}\right\}$$

Pour déterminer enfin les valeurs de $B_0 B_1 \ldots B_{s-2}$ correspondant à chaque système de valeurs de Ω^4, on remarquera que les mêmes équations (4) devant être satisfaites en particulier pour $x = 0$, ce qui annule les seconds membres, on doit avoir :

$$(9)\left\{\begin{array}{l} A'_0(\varphi_0 + \Sigma R_0) + A'_1(\varphi_1 + \Sigma R_1) + C' = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A^i_0(\varphi_0 + \Sigma R_0) + A^i_1(\varphi_1 + \Sigma R_1) + \ldots + A^i_i(\varphi_i + \Sigma R_i) + C^i = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

en désignant par R l'expression :

$$\frac{B\left(2\cos\frac{2a}{\omega} + e^{\frac{2a}{\omega}} - e^{-\frac{2a}{\omega}}\right)}{\cos\frac{a}{\omega}\left(e^{\frac{a}{\omega}} + e^{\frac{a}{\omega}}\right)}.$$

Or ces équations, si l'on y remplace $R^1, R^2 \ldots R^{s-1}$ par leurs valeurs $z_1 R_0$, $z_2 R_0$, ... $z_{s-1} R_0$, z_i désignant en général le rapport $\frac{P_i}{P_0} = \frac{B_i}{B_0} = \frac{R_i}{R_0}$ tiré des équations (6) pour chaque valeur de $\frac{1}{\Omega^4}$, deviennent :

$$(10)\left\{\begin{array}{l} A'_0\varphi_0 + A'_1\varphi_i + C' + \Sigma R_0(A'_0 + A'_1 z_1) = 0, \\ A''_0\varphi_0 + A''_1\varphi_1 + A''_2\varphi_2 + C'' + \Sigma R_0(A''_0 + A''_1 z_1 + \\ \qquad + A''_2 z_2) = 0. \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A^{s-1}_0\varphi_0 + A^{s-1}_1\varphi_1 + \ldots + A^{s-1}_{s-2}\varphi_{s-2} + C^{s-1} + \\ \qquad + \Sigma R_0(A^{s-1}_0 + A^{s-1}_1 z_1 + \ldots + A^{s-1}_{s-2} z_{s-1}) = 0. \end{array}\right.$$

On aura ainsi, pour déterminer les $s - 1$ valeurs de R_0 correspondant à chaque racine de l'équation du degré $s - 1$ en $\frac{1}{\Omega^4}$, s_{-1} équations du premier degré qui suffiront pour déterminer ces quantités.

10. Il est à remarquer que les quantités désignées par φ_0 $\varphi_1 \ldots$, ne sont autre chose que les réactions qui tendent à se produire sous l'action de la charge au contact du bordage et des entretoises lorsque la résistance du bordage à la flexion devient infinie par rapport à la résistance des entretoises au même effort. En effet, si l'on fait μ infini, les premiers membres des équations (4) disparaissent, et, pour satisfaire à ces équations, on n'a plus qu'à égaler à o les termes contenus dans les quadruples intégrales, ce qui conduit aux équations au moyen desquelles $\varphi_0, \varphi_1 \ldots$, ont été déterminés.

De même les coefficients désignés par la lettre A, dans les équations (9) sont les valeurs des réactions qui tendent à se développer dans les bordages à leur rencontre avec les entretoises, lorsque la résistance des entretoises à la flexion devient infinie par rapport à celle du bordage. Car alors les seconds membres des équations (4) où l'on fait m_0 m_1 .. infinis s'annulent, et les premiers membres égalés à o ne diffèrent des premiers membres des équations (9) que par la substitution de π_i à $\varphi_i + \Sigma R_i$. Si l'on désigne par ψ_0, $\psi_1 \ldots$, les réactions qui se produisent dans ce cas, on pourra donc remplacer les équations (9) par les suivantes :

$$\varphi_0 + \Sigma R_0 = \psi_0,$$
$$\varphi_1 + \Sigma z_1 R_0 = \psi_1,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\varphi_i + \Sigma z_i R_0 = \psi,$$

en nombre $s - 1$, qui permettront également de déterminer les $s - 1$ valeurs de R_0.

Il suit de là que l'expression générale de π_i sera :

$$\pi_i = \varphi_i + \Sigma R_i f(x),$$

en désignant maintenant par $f(x)$ la fonction :

$$(11)\ f(x) = \frac{\left(e^{\frac{a}{\omega}}+e^{-\frac{a}{\omega}}\right)\cos\frac{a}{\omega}\left(e^{\frac{x-a}{\omega}}+e^{-\frac{x-a}{\omega}}\right)\cos\frac{x-a}{\omega}+\left(e^{\frac{a}{\omega}}-e^{-\frac{a}{\omega}}\right)\sin\frac{a}{\omega}\left(e^{\frac{x-a}{\omega}}-e^{-\frac{x-a}{\omega}}\right)\sin\frac{x-a}{\omega}}{2\cos^2\frac{a}{\omega}+e^{\frac{2a}{\omega}}+e^{-\frac{2a}{\omega}}}$$

et R_i ayant pour valeur :

$$R_i = z_i R_0.$$

La flèche en chaque point d'une entretoise aura pour valeur :

$$y_i = \frac{1}{m}\left\{\left[\frac{(x-a)^4-a^4}{1.2.3.4}-\frac{a^2(x-a)^2-a^2]}{4}\right]\varphi_i - \Sigma\frac{\omega^4}{4}R_i(f(x)-1)\right\},$$

et le moment fléchissant :

$$Mf_i = \int_0^x dx\int_a^x \pi_i dx = \frac{(x-a)^2-a^2}{1.2}\varphi_i + \Sigma\frac{\omega^2}{2}F(x)R_i,$$

en posant :

$$f_i(x) = \frac{\cos\frac{a}{\omega}\left(e^{\frac{a}{\omega}}+e^{-\frac{a}{\omega}}\right)\left(e^{\frac{x-a}{\omega}}+e^{-\frac{x-a}{\omega}}\right)\sin\frac{x-a}{\omega}-\sin\frac{a}{\omega}\left(e^{\frac{a}{\omega}}-e^{-\frac{a}{\omega}}\right)\left(e^{\frac{x-a}{\omega}}+e^{-\frac{x-a}{\omega}}\right)\cos\frac{x-a}{\omega}}{2\cos\frac{2a}{\omega}+e^{\frac{2a}{\omega}}+e^{-\frac{2a}{\omega}}};$$

d'où l'on déduira pour la flèche et le moment fléchissant au milieu de la portée qui correspond à leur maximum :

$$f_i = \frac{1}{m}\left\{\frac{5}{24}a^4\varphi_i - \Sigma R_i \frac{\omega^4}{4}\,\frac{2\cos\frac{a}{\omega}\left(e^{\frac{a}{\omega}}+e^{-\frac{a}{\omega}}\right) - e^{\frac{2a}{\omega}} - e^{-\frac{2a}{\omega}} - 2\cos\frac{2a}{\omega}}{2\cos\frac{2a}{\omega} + e^{\frac{2a}{\omega}} + e^{-\frac{2a}{\omega}}}\right\}$$

$$Mf_i = -\left\{\frac{a^2}{2}\varphi_i + \Sigma R_i \frac{\omega^2}{2}\,\frac{2\sin\frac{a}{\omega}\left(e^{\frac{a}{\omega}} - e^{-\frac{a}{\omega}}\right)}{2\cos\frac{2a}{\omega} + e^{\frac{2a}{\omega}} + e^{-\frac{2a}{\omega}}}\right\},$$

ou si l'on développe en séries le numérateur et le dénominateur de chacune de ces expressions, ce qui donne ;

$$\frac{2\cos\frac{a}{\omega}\left(e^{\frac{a}{\omega}}+e^{-\frac{a}{\omega}}\right) - e^{\frac{2a}{\omega}} - e^{-\frac{2a}{\omega}}\ 2\cos\frac{2a}{\omega}}{2\cos\frac{2a}{\omega} + e^{\frac{2a}{\omega}} + e^{-\frac{2a}{\omega}}}$$

$$= -\frac{1 + \frac{16\frac{a^4}{\omega^4}}{1.2.3.4} + \frac{256\frac{a^8}{\omega^8}}{1.2.3.4\ldots7.8} - 1 + \frac{4\frac{a^4}{\omega^4}}{1.2.3.4} - \frac{384\frac{a^8}{\omega^8}}{1.2^2.3^2.4.5.6.7.8} + \ldots}{1 + \frac{2}{3}\frac{a^4}{\omega^4} + \frac{2}{315}\frac{a^8}{\omega^8} + \frac{4}{467775}\frac{a^{12}}{\omega^{12}} + \ldots}$$

$$\frac{2\sin\frac{a}{\omega}\left(e^{\frac{a}{\omega}} - e^{-\frac{a}{\omega}}\right)}{2\cos\frac{2a}{\omega} + e^{\frac{2a}{\omega}} + e^{-\frac{2a}{\omega}}} = \frac{1 - \frac{1}{90}\frac{a^4}{\omega^4} + \frac{1}{113400}\frac{a^8}{\omega^8} + \ldots}{1 + \frac{2}{3}\frac{a^4}{\omega^4} + \frac{2}{315}\frac{a^4}{\omega^4} + \frac{4}{467775}\frac{a^{12}}{\omega^{12}} + \ldots}\cdot\frac{a^2}{\omega^2}$$

on obtient :

(12) $$f_i = \frac{5}{24m}\,a^4\left(\varphi_i + \Sigma R_i\theta\right).$$

(13) $$Mf_i = \frac{a^2}{2}\left(\varphi_i + \Sigma R_i\rho\right);$$

en désignant par θ et ρ les fonctions :

$$(14) \quad \theta = \frac{1 + \frac{1}{140}\frac{a^4}{\omega^4} \quad \frac{13}{124740}\frac{a^8}{\omega^8} + \dots}{1 + \frac{2}{3}\frac{a^4}{\omega^4} + \frac{2}{315}\frac{a^8}{\omega^8} + \frac{4}{467775}\frac{a^{12}}{\omega^{12}} + \dots}.$$

$$(15) \quad \rho = \frac{1 - \frac{1}{90}\frac{a^4}{\omega^4} + \frac{1}{113400}\frac{a^8}{\omega^8} + \dots}{1 + \frac{2}{3}\frac{a^4}{\omega^4} + \frac{2}{315}\frac{a^8}{\omega^8} + \frac{4}{467775}\frac{a^{12}}{\omega^{12}} + \dots}.$$

11. La flèche et le moment fléchissant dans chaque entretoise au milieu de la portée sont donc en définitive des fonctions assez simples de cette portée et des réactions qui tendent à s'y développer lorsque la résistance des bordages à la flexion, comparée à la résistance des entretoises au même effort, est successivement infinie ou nulle. Les fonctions θ et ρ, correspondant à chaque valeur de Ω^4 ou de ω^4 seront d'ailleurs facilement calculées au moyen de cette valeur.

12. Il est à remarquer que les équations qui ont conduit à l'équation du degré $s-1$ en $\frac{1}{\Omega^4}$ d'où l'on a tiré les $s-1$ valeurs de cette quantité ne contiennent que des termes indépendants de la charge et de sa distance d à l'une des entretoises extrêmes. Les fonctions θ et ρ seront donc elles-mêmes indépendantes de ces données et ne dépendront que de l'espacement des entretoises et des flexibilités relatives du bordage et des entretoises, ou de ce que l'on peut appeler la roideur du système.

13. Nous avons supposé qu'il s'agissait d'une charge isolée s'exerçant successivement sur une seule ligne droite parallèle aux entretoises. Si plusieurs charges isolées, également uniformes, agissent le long de plusieurs droites parallèles aux entretoises, les $s-1$ valeurs de Ω^4 ou de ω^4 étant les mêmes dans ces divers cas, et par suite les $s-1$

valeurs de ρ et θ, aussi, il suffira d'ajouter dans les parenthèses des seconds membres des équations (12) et (13) les valeurs de φ_i et R_i correspondant à chaque charge, valeurs qui seront fournies par les équations (5) et (9) où les quantités toutes connues désignées par C et D seront seules changées, ce qui reviendra à ajouter dans chacune de ces séries d'équations les termes tout connus provenant de chacune des charges et à les résoudre ensuite pour avoir les valeurs de φ et de R_i répondant à la somme des charges.

14. Si, au lieu de charges isolées, on a des charges continues occupant un ou plusieurs intervalles entre les entretoises, on obtiendra par des intégrations effectuées sur la charge élémentaire *pdd* les termes tout connus des équations donnant les valeurs de φ et de R. Dans ces intégrations, on aura toutefois soin de remarquer que, les charges élémentaires ne commençant à apparaître dans les équations qui conduisent au système d'équations (4) que lorsqu'on arrive à un intervalle contenant le point d'application de ces charges élémentaires, on doit prendre pour limite supérieure de l'intégration dans chacune des équations (3) l'extrémité de l'intervalle correspondant, à moins que la charge ne s'étende pas jusqu'à cette extrémité, auquel cas la limite de la charge est aussi la limite de l'intégration. Si par exemple la charge commence dans le second intervalle et finit dans le quatrième et que l'on désigne par d_1 et d_2 les distances des limites de la charge à la première entretoise, dans la première des équations (3), on intégrera le terme en p qui se réduira à $\frac{pdd}{6\mu} b_1 (b_2-d)^3$ entre les limites d_1 et b_2; dans la seconde, le terme en p qui sera $\frac{pdd}{6\mu} b_1 (b_3-d)^3$, entre les limites d_1 et b_3, et dans la troisième le même terme, devenu $\frac{pdd}{6\mu} b_1 (b_4-d)^3$ entre les limites d_1 et d_2 et ainsi de suite jusqu'à la dernière équation, les limites de l'intégration continuant à être d_1 et d_2.

CHAPITRE III.

APPLICATION DES FORMULES PRÉCÉDEMMENT TROUVÉES AUX PORTES D'ÉCLUSE.

15. Si l'on néglige tout d'abord, dans les portes d'écluse, la réaction des deux ventaux l'un contre l'autre, chaque ventail, considéré au point de vue de la flexion, est un cas particulier du problème traité au chapitre précédent. Il suffit, pour faire rentrer ce cas particulier dans le problème général, de remplacer le seuil contre lequel viennent buter les bordages verticaux par l'intermédiaire de l'entretoise inférieure, par une entretoise pour laquelle la quantité désignée précédemment par m devient infinie. et de supposer que la charge rapportée en chaque point au mètre superficiel p, varie comme les ordonnées d'un contour rectiligne, l'intégration à opérer sur l'élément pdd étant d'ailleurs assujettie aux règles posées au § 14.

Nous supposerons le nombre des entretoises successivement égal à 3, 4, 5, 6, y compris le seuil, et les entretoises toujours également espacées dans ces différents cas.

Cas de trois entretoises.

16. Si l'on désigne par d_1 et d_2 les distances, à l'axe de l'entretoise supérieure, des extrémités de la partie de la porte qui reçoit une charge d'eau, les équations (2) peuvent s'écrire :

$$\pi_0 + \pi_1 + \pi_2 = \int_{d_1}^{d_2} pdd,$$

$$\pi_1 b_1 + \pi_2 b_2 = \int_{d_1}^{d_2} pd\,dd.$$

Les équations (5) se réduisent à l'équation unique :

$$\frac{\pi_0 b_2 b^2_1 (b_2 - b_1)}{3\mu} + \frac{1}{6\mu}\left\{b_2 \int_{d_1}^{d_2} p(b_1 - d)^3 dd -\right.$$

$$\left. - b_1 \int_{d_1}^{d_2} p(b_2 - d)^3 dd + b_1(b_2 - b_1)\left[b_2 \int_{d_1}^{d_2} pdd - \int_{d_1}^{d_2} pd\,dd\right]\right\}$$

$$= \frac{1}{b_2 - b_1}\int_0^x dx \int_a^x dx \int_0^x dx \int_a^x dx$$

$$\left\{-\pi_0\left[\frac{b^2_2}{m_1} + \frac{(b_2 - b_1)^2}{m_0}\right] + \frac{b_2}{m_1}\left[b_2 \int_{d_1}^{d_2} pdd - \int_{d_1}^{d_2} pd\,dd\right]\right\}$$

d'où l'on déduira pour l'équation donnant la valeur unique de Ω^4:

$$-\frac{1}{\Omega^4}\frac{b_1 b^2_2 (b_2 - b_1)^2}{3\mu} + \frac{b^2_2}{m_1} + \frac{(b_2 - b_1)^2}{m_0},$$

et par suite :

$$\frac{a^4}{\omega^4} = \frac{a^4\left[\frac{b^2_3}{m_1} + \frac{(b_2 - b_1)^2}{m_0}\right]}{\frac{4\, b_2 b^2_1 (b_2 - b_1)^2}{3\mu}}.$$

Les valeurs de φ_0 et ψ_0 seront données par les équations :

$$o = -\varphi_0\left[\frac{b^2_2}{m_1} + \frac{(b_2 - b_1)^2}{m_0}\right] + \frac{b_2}{m_1}\left[b_2 \int_{d_1}^{d_2} pdd - \int_{d_1}^{d_2} pddd\right]$$

$$o = \psi_0 \frac{b_2 b^2_1 (b_2 - b_1)}{3\mu} + \frac{1}{6\mu}\left\{b_2 \int_{d_1}^{d_2} p(b_1 - d)^3 dd -\right.$$

$$\left. - b_1 \int_{d_1}^{d_2} p(b_1 - d)^3 dd + b_1(b_2 - b_1)\left[b_2 \int_{d_1}^{d_2} pdd - \int_{d_1}^{d_2} pddd\right]\right\}$$

les autres valeurs de φ et ψ devant être déduites des équations (2) où l'on remplace π successivement par φ et ψ, et où l'on transportera les valeurs de ψ_0 et φ_0 déduites des équations précédentes.

On aura d'ailleurs, en général, pour chaque entretoise :

$$\pi_i = \varphi_i + \mathrm{R}_i f(x)$$

et $$R_i = \psi_i - \varphi_i,$$

$f(x)$ étant la fonction définie par la formule (11).

Restent à déterminer, dans chaque hypothèse sur la charge d'eau, les quantités ψ_i et φ_i.

17. Nous ferons seulement les deux hypothèses : 1° d'une charge d'eau unique pressant la porte sur toute sa hauteur; 2° de deux charges d'eau agissant en sens contraire, l'une sur toute la hauteur de la porte, l'autre entre le seuil et l'entretoise intermédiaire.

Nous supposerons en même temps les entretoises également espacées et d'égales dimensions, c'est-à-dire $b_1 = b_2 - b_1 = \frac{1}{2} b$ et $m_0 = m_1 = m_2 = m$, en désignant par b et m la hauteur totale et le moment de résistance à la flexion pour toutes les entretoises.

18. *Premier cas.*—Les équations donnant les valeurs de ψ_0 et φ_0 sont alors :

$$\psi_0 \frac{b_2 b^2_1 (b_2 - b_1)}{3\mu} + \frac{1}{6\mu} p \left[\frac{b_2 b^5_1 - b^5_2 b_1}{20} + \frac{b_1 (b_2 - b_1)^2 b^3_2}{6}\right] = 0,$$

$$-\varphi_0 \frac{b^2_2 + (b_2 - b_1)^2}{m} + p \frac{b^4_2}{6m} = 0.$$

et elles deviennent, si l'on y fait $b_1 = \frac{1}{2} b$ et $b_2 = b_1$:

$$2\psi_0 + \frac{5}{240} pb^2 = 0,$$

$$-5\varphi_0 + \frac{16}{24} pb^2 = 0,$$

équations d'où l'on tirera :

$$\psi_0 = \frac{2,5}{240} pb^2, \quad \varphi_0 = \frac{32}{240} pb^2,$$

$$\psi_1 = \frac{75}{240} pb^2, \quad \varphi_1 = \frac{16}{240} pb^2,$$

$$\psi_2 = \frac{42,5}{240} pb^2, \quad \varphi_2 = \frac{72}{240} pb^2;$$

et par suite :

$$R_0 = -\frac{29,5}{240}pb^2, \qquad R_1 = \frac{59}{240}pb^2.$$

On aura, en définitive, pour les flèches et les moments fléchissants maxima :

$$f_0 = \frac{5pa^4b^2}{24m}\frac{32 - 29,5\theta}{240},$$

$$f_1 = \frac{5pa^4b^2}{24m}\frac{16 + 59\theta}{240},$$

$$Mf_0 = \frac{pa^2b^2}{2}\frac{32 - 29,5\rho}{240},$$

$$Mf_1 = \frac{pa^2b^2}{2}\frac{16 + 59\rho}{240},$$

θ et ρ étant les fonctions de la quantité $k^4 = \frac{a^4}{\omega^4}$ définies par les équations (14 et) (15), et k^4 ayant alors pour valeur :

$$K^4 = \frac{15a^4\mu}{b^3m}.$$

19. La flèche et le moment fléchissant maxima pour une pièce de longueur a, de même équarrissage que les entretoises, uniformément chargée du même poids total $\frac{1}{2}pb^2$, seraient :

$$\frac{5}{24}p\frac{a^4b^2}{2} \quad \text{et} \quad p\frac{a^2b^2}{4}.$$

On voit donc que la répartition des pressions due à l'influence du bordage aura pour effet de faire supporter aux deux entretoises des efforts maxima qui correspondraient à une fraction

$$\frac{32 - 29,5\rho}{120}$$

de la charge totale pour la première, et à une autre fraction

$$\frac{16+56\rho}{120}$$

de la même charge pour la seconde.

Ce sera donc comme si le seuil supportait une fraction de la charge totale égale à

$$1-\frac{48+29{,}5\rho}{120}=\frac{72-29{,}5\rho}{120}.$$

20. La répartition de la charge entre les entretoises et le seuil dépendant uniquement, pour des entretoises et un bordage de portée, de hauteur, et d'espacement donnés, de la quantité $k^4=\frac{a^4}{\omega^4}$ dont ρ est une fonction déterminée, cette quantité peut être considérée comme le coefficient de roideur du système.

On pourrait se proposer de déterminer ce coefficient, de telle sorte que les deux entretoises fussent également chargées ; on poserait pour cela :

$$16+59\rho=32-29{,}5\rho;$$

d'où :

$$\rho=\frac{16}{88.5}=0.18.$$

On trouverait que la valeur correspondante de $k^4=\frac{a^4}{\omega^4}$ est 5.80 environ.

Etant donc donnée une porte d'écluse à trois entretoises également espacées, de hauteur et de largeur déterminées, on peut, en établissant un certain rapport entre les résistances à la flexion des entretoises et du bordage, faire en sorte que les deux entretoises supérieures supportent le même effort maximum.

21. *Deuxième cas.* — Si l'on suppose maintenant la charge d'eau représentée par un trapèze dont la grande base est $b = b_2$, la petite base $b_2 - b_1$, et la hauteur b_1, la charge totale par mètre courant aura pour valeur :

$$P = \frac{3}{8} pb^2,$$

et les équations donnant les valeurs de ψ_0 et φ_0 deviendront :

$$o = \frac{\psi_0 b^2 b_1^2 (b_2 - b_1)}{3\mu} + \frac{1}{6\mu} p \left\{ \frac{b_2 b^5 - b_1 b_2^5 + b_1 (b_2 - b_1)^5}{20} + \right.$$

$$\left. + b_1 (b_2 - b_1)^2 \left[\frac{b_2 b_1^2}{2} + b_2 b_1 (b_2 - b_1) - \frac{b_1^3}{3} - \frac{b_1 (b_2^2 - b_1^2)}{2} \right] \right\},$$

$$o = - \varphi_0 \frac{b_2^2 + (b_2 - b_1)^2}{m} +$$

$$+ \frac{pb_2}{m} \left[\frac{b_2 b_1^2}{2} + b_2 b_1 (b_2 - b_1) - \frac{b_1^3}{3} - \frac{b_1 (b_2^2 - b_1^2)}{2} \right];$$

d'où l'on tire, en faisant $b_1 = b_2 - b_1 = \frac{b}{2}$, et en exprimant les quantités φ et ψ en fonction de la charge totale P :

$$\psi_0 = \frac{17}{360} P, \qquad \varphi_0 = \frac{112}{360} P,$$

$$\psi_1 = \frac{246}{360} P, \qquad \varphi_1 = \frac{56}{360} P,$$

$$\psi_2 = \frac{97}{360} P, \qquad \varphi_2 = \frac{192}{360} P.$$

On obtiendra ensuite pour les flèches et les moments fléchissants maxima :

$$f_0 = \frac{5}{24} Pa^4 \frac{112 - 95\rho}{360},$$

$$f_1 = \frac{5}{24} Pa^4 \frac{56 + 190\rho}{360},$$

$$Mf_0 = \frac{Pa^2}{2} \frac{112 - 95\rho}{360},$$

$$Mf_1 = \frac{Pa^2}{2} \frac{56 + 190\rho}{360}.$$

L'effort maximum, dans les entretoises, sera donc le même que si chacune d'elles et le seuil supportaient, uniformément réparties sur leur longueur, les fractions suivantes de la charge totale :

Entretoise supérieure. . . . $\frac{112 - 95\rho}{360}$,

Entretoise inférieure. . . . $\frac{56 + 190\rho}{360}$,

Seuil. . . . . $\frac{192 - 95\rho}{360}$.

22. Pour comparer les efforts maxima répondant à ce nouveau cas à ceux qui ont été obtenus dans le cas précédent, il suffira de consulter le tableau suivant, qui donne, dans chaque cas, exprimées en fractions décimales, les quantités ψ et φ divisées chacune par la charge totale P :

INDICATION des parties chargées.	VALEURS DES QUANTITÉS φ ET ψ divisées par la charge totale.								
	Entretoise supérieure			Entretoise inférieure.			Seuil.		
	φ_0	ψ_0	$\psi_0 - \varphi_0$	φ_1	ψ_1	$\psi_1 - \varphi_1$	φ_2	ψ_2	φ_2
Hauteur totale. . .	0.266	0.020	−0.246	0.133	0.625	0.492	0.600	0.354	−0.246
Demi-hauteur. . .	0.311	0.047	−0.264	0.155	0.681	0.526	0.533	0.271	−0.264

On voit par ce tableau qu'à égalité de charge totale, l'entretoise inférieure est plus fatiguée dans le second cas que dans le premier, et qu'une partie moindre de la charge totale est alors reportée sur le seuil, puisque les moments fléchissants maxima ont successivement pour expression dans ces deux cas pour l'entretoise inférieure :

$$1^{\text{er}} \text{ cas.} \ldots \ldots \ M f_1 = \frac{Pa^2}{2}(0.133 + 0.492\rho),$$

$$2^{\text{me}} \text{ cas.} \ldots \ldots \ M f_1 = \frac{Pa^2}{2}(0.155 + 0.526\rho);$$

tandis que les charges reportées sur le seuil peuvent être représentées :

Dans le 1er cas par $P(0.600 - 0.246\rho)$ par mètre courant,
Dans le 2me cas par $P(0.533 - 0.264\rho)$ *id.*

Il suit de là que, dans une porte d'écluse, primitivement chargée d'eau sur sa hauteur totale, l'effort maximum qui se produit dans l'entretoise inférieure pourra n'éprouver aucune diminution lorsque la charge totale diminuera par suite de l'élévation du niveau de l'eau en aval si cet exhaussement reste compris entre certaines limites.

Nous constaterons un fait analogue pour les portes d'écluse formées d'un plus grand nombre d'entretoises.

Cas de quatre entretoises.

23. En conservant les notations des paragraphes précédents, on reconnaît que les équations (4) se réduisent alors aux deux équations :

$$A'_0\pi_0 + A'_1\pi_1 + C' = \int_0^x dx \int_a^x dx \int_0^x dx \int_a^x dx\,(M'_0\pi_0 + M'_1\pi_1 + D'),$$

$$A''_0\pi_0 + A''_1\pi_1 + C'' = \int_0^x dx \int_a^x dx \int_0^x dx \int_a^x dx\,(M''_0\pi_0 + M''_1\pi_1 + D''),$$

où l'on a :

$$A'_0 = \frac{b_1 b_2 (b_3 - b_2)(b^2_2 - b^2_1)}{6\mu},$$

$$A'_1 = \frac{b_1 (b_3 - b_2)(b_2 - b_1)^3}{6\mu},$$

$$A''_0 = \frac{b_1 b_3 (b_3 - b_2)\,[\,b^2_3 - b^2_1 - (b_3 - b^2_2)\,]}{6\mu},$$

$$A''_1 = \frac{b_1 (b_3 - b_2)(b_3 - b_1)\,[(b_3 - b_1)^2 - (b_3 - b_2)^2]}{6\mu},$$

$$M'_0 = \frac{b_1 b_3}{m_2} - \frac{b_2 - b_1)(b_3 - b_2)}{m_0},$$

$$M'_1 = \frac{b_1 (b_3 - b_1)}{m_2} + \frac{b_2 (b_3 - b_2)}{m_1},$$

$$M''_0 = -\frac{(b_3 - b_1)(b_3 - b_2)}{m_0},$$

$$M''_1 = \frac{b_3 (b_3 - b_2)}{m_1}.$$

On en déduit, pour l'équation donnant les valeurs de $\frac{1}{\Omega^4}$:

$$\frac{A'_0 A''_1 - A'_1 A'_1 A''_0}{\Omega^8} - \frac{1}{\Omega^4}(M''_1 A'_0 + A''_1 M'_0 - M'_1 A''_0 - A'_1 M''_0) +$$
$$+ M'_0 M''_1 - M''_0 M'_1 = 0\,;$$

d'où l'on tirera deux valeurs de $\frac{1}{\Omega^4}$, $\frac{1}{\Omega'^4}$ et $\frac{1}{\Omega''^4}$, qui, transportées dans l'équation :

$$z_1 = \frac{R}{R_0} = -\frac{M''_1 - \frac{A''_1}{\Omega^4}}{M''_0 - \frac{A''_0}{\Omega^4}},$$

à laquelle se réduit la première des équations (6), permettront de déterminer les deux valeurs z'_1 et z''_1 du rapport z_1,

et par suite les coefficients de $f\left(\frac{x}{\omega}\right)$ dans les expressions

$$\pi_0 = \varphi_0 + R'_0 f\left(\frac{x}{\omega'_1}\right) + R''_0 f\left(\frac{x}{\omega''}\right),$$

et

$$\pi_1 = \varphi_1 + R'_1 f\left(\frac{x}{\omega'}\right) + R''_1 f\left(\frac{x}{\omega''}\right),$$

lorsqu'on aura déterminé d'autre part F'_0 et F''_0 au moyen des équations

$$R'_0 + R''_0 = -\psi_0 + \varphi_0,$$
$$z'_1 R'_0 + z''_1 R''_0 = -\psi_1 + \varphi_1,$$

les ψ et φ étant obtenus au moyen des équations :

$$A'_0\psi_0 + A'\psi_1 + C' = 0,$$
$$A''_0\psi_0 + A''_1\psi_1 + C'' = 0,$$
$$M'_0\varphi_0 + M'_1\varphi_1 + D' = 0,$$
$$M''_0\varphi_0 + M''\varphi_1 + D'' = 0,$$

où les termes indépendants des variables dépendent seuls des charges et de leurs points d'application.

24. S'il s'agit encore d'entretoises également espacées et d'égale force, c'est-à-dire si l'on a :

$$b_1 = b_2 - b_1 = b_3 - b_2 \quad \text{et} \quad m_0 = m_1 = m_2,$$

on trouve :

$$A'_0 = \frac{6}{6.3^5\mu} b^5, \quad A'_1 = \frac{1}{6.3^5\mu} b^5$$

$$A''_0 = \frac{21}{6.3^5\mu} b^5, \quad A''_1 = \frac{6}{6.3^5\mu} b^5.$$

$$M_0 = \frac{2}{m}\frac{b^2}{3^2}, \qquad M'_1 = \frac{4}{m}\frac{b^2}{3^2},$$

$$M''_0 = \frac{2}{m}\frac{b^2}{3^2}, \qquad M''_1 = \frac{3}{m}\frac{b^2}{3^2},$$

et l'équation du deuxième degré devient :

$$\frac{15}{3^8}\frac{b^8}{\Omega^8}+\frac{104}{3^4}\frac{\mu}{m}\frac{b^4}{\Omega^4}+56\frac{\mu^2}{m^2}=0,$$

ou en posant :

$$\frac{1}{\Omega^4}\frac{m}{\mu}\frac{b^4}{3^4}=X, \quad 15X^2+104X+56=0;$$

d'où l'on tire :

$$X'=-0.588, \quad X''=-6.344,$$

et

$$z'_1=-0.876, \quad z''_1=-2.932.$$

Nous ferons sur les charges des hypothèses analogues à celles qui ont été faites précédemment, c'est-à-dire que nous supposerons successivement une seule charge d'eau pressant l'un des côtés de la porte sur toute sa hauteur, puis cette même charge, en partie détruite par une autre charge d'eau, agissant sur le côté opposé et s'élevant à la hauteur de la première et de la deuxième entretoise à partir du seuil.

25. *Premier cas.* On a alors :

$$C'=p\frac{b_3-b_2}{6\mu}\frac{b_2b^5_1-b_1b^5_2}{20}=-\frac{1}{6\mu}p\frac{30b^7}{20.3^7},$$

$$C''=p\frac{b_3-b_2}{6\mu}\left[\frac{b_3b^5_1-b_1b^5_3}{20}+\frac{b_1(b_3-b_2)^2b^3_3}{6}\right]=$$

$$=-\frac{1}{6\mu}p\frac{450b^7}{60.3^7},$$

$$D'=\frac{pb_1b^3_3}{6m}=\frac{27pb^4}{6m.3^4}, \quad D''=0.$$

Les équations donnant les valeurs des ψ et φ seront :

$$6\psi_0 + \psi_1 = \frac{1}{6} pb^2,$$
$$21\psi_0 + 6\psi_1 = \frac{5}{6} pb^2,$$

et

$$4\varphi_0 + 8\varphi_1 = pb^2,$$
$$-4\varphi_0 + 6\varphi_1 = 0;$$

d'où l'on tire :

$$\psi_0 = \frac{1}{90} pb^2, \quad \varphi_0 = \frac{3}{28} pb^2,$$
$$\psi_1 = \frac{9}{90} pb^2, \quad \varphi_1 = \frac{2}{28} pb^2,$$

et par suite :

$$R'_0 + R''_0 = 0.0960\, pb^2,$$
$$[0.876\, R'_0 + 2.932\, R''_0] = 0.02857\, pb^2,$$

équations qui donnent :

$$R'_0 = -0.123\, pb^2, \quad R''_0 = -0\ 0270\, pb^2;$$

et par suite :

$$R'_1 = 0.1080\, pb^2, \quad R''_1 = -0.0794\, pb^2,$$

on obtiendra ensuite les coefficients R'_2, R''_2, R'_3, R''_3 au moyen des relations :

$$R_0 + R_1 + R_2 + R_3 = 0,$$
$$R_1 + 2R_2 + 3R_3 = 0,$$

où l'on mettra successivement à la place de R_0 et R_1 les valeurs trouvées, ce qui donnera :

$$R'_2 = 0.1540\, pb^2, \quad R''_2 = 0.0778\, pb^2,$$
$$R'_3 = -0.1390\, pb^2, \quad R''_3 = -0.7216\, pb^2.$$

L'expression des moments fléchissants deviendra par suite, si l'on désigne par P la charge totale par mètre de longueur d'entretoise, laquelle a pour valeur $\frac{1}{2} pb^2$:

$$Mf_0 = \frac{Pa^2}{2}(0.2142 - 0.2460\rho' + 0.0540\rho''),$$

$$Mf_1 = \frac{Pa^2}{2}(0.1428 + 0.2160\rho' - 0.1588\rho''),$$

$$Mf_2 = \frac{Pa^2}{2}(0.0714 + 0.3060\rho' - 0.1556\rho''),$$

où ρ' et ρ'' seront les mêmes fonctions que précédemment des quantités k'^4 et k''^4 qui auront respectivement pour valeur :

$$K'^4 = \frac{a^4}{\omega'^4} = -\frac{a^4}{4\Omega'^4} = \frac{0.882.6.9}{4}\frac{a^4\mu}{b^3m},$$

$$K''^4 = \frac{a^4}{\omega''^4} = -\frac{a^4}{4\Omega^4} = \frac{9,157.6.9}{4}\frac{a^4\mu}{b^3m}.$$

26. On pourra encore considérer la quantité $\frac{a^4\mu}{b^3m}$ comme mesurant la roideur du système, puisque, les portées des entretoises et la hauteur du bordage vertical restant les mêmes, la répartition des charges entre les diverses entretoises et le seuil ne dépend que de cette quantité.

En mettant dans l'expression de ρ' ainsi que dans celle de ρ'' leurs valeurs en fonction de $\frac{a^4\mu}{b^3m}$, on reconnaîtrait que lorsque cette quantité reste comprise entre 0.30 et 0.40, ce qui correspond à des valeurs de ρ' et ρ'' peu différentes de 0.20 et 0.02, les valeurs de Mf_0, Mf_1, Mf_2 diffèrent peu entre elles. On trouve alors que le coefficient de $\frac{Pa^2}{2}$ dans l'expression des moments fléchissants reste compris entre 0.135 et 0,190. Les efforts maxima dans les diverses entretoises sont donc moindres que si chacune d'elles supportait $\frac{1}{5}$ de la charge totale répartie uniformément sur sa longueur.

On peut donc, en établissant entre les forces des bordages

et des entretoises un certain rapport, faire en sorte que la charge totale se répartisse à peu près également entre les diverses entretoises.

27. *Deuxième cas.* — Si la charge d'eau sur la porte est représentée par un trapèze de bases b et $\frac{b}{3}$ et de hauteur $\frac{2b}{3}$, on trouve :

$$C' = \frac{b_3 - b_2}{6\mu} p \frac{(b_2 b^5_1 - b_1 b^5_2)}{20} = -\frac{1}{6\mu} p \frac{30}{20} \frac{b^7}{3^7},$$

$$C'' = \frac{b_3 - b_2}{6\mu} \left\{ \frac{b_3 b^5_1 - b_1 b^5_3 + b_1 (b_3 - b_2)^5}{20} + b_1 (b_3 - b_2)^2 \right.$$

$$\left. \left[\frac{b_3 b^2_2}{2} + b_3 b_2 (b_3 - b_2) - \frac{b^3_2}{3} - \frac{b_2 (b^2_3 - b^2_2)}{2} \right] \right\}$$

$$= -\frac{1}{6\mu} p \frac{457}{60} \frac{b^7}{3^7} \Big\},$$

$$D' = -\frac{pb_1}{m} \left[\frac{b_3 b^2_2}{2} + b_3 b_2 (b_3 - b_2) - \frac{b^3_2}{3} - \frac{b_2 (b^2_3 - b^2_2)}{2} \right] =$$

$$= -\frac{13 p b^4}{3^5 . m}, \quad D'' = 0;$$

et l'on obtient :

$$\psi_0 = \frac{83}{15.540} pb^2 = 0.010247\, pb^2,$$

$$\psi_1 = \frac{852}{15.540} pb^2 = 0.105180\, pb^2,$$

$$\varphi_0 = \frac{26}{252} pb^2 = 0.103174\, pb^2,$$

$$\varphi_1 = \frac{2}{3} \varphi_0 = 0.06878\, pb^2,$$

ce qui conduit aux équations :

$$R'_0 + R''_0 = 0.09293\, pb^2,$$
$$0.876\, R'_0 + 2.932\, R''_0 = 0.0364\, pb^2;$$

d'où l'on tire :

$$R'_0 = -0.1148\, pb^2, \qquad R''_0 = 0.0219\, pb^2,$$

et pour l'expression des moments fléchissants, en désignant encore par P la charge totale par mètre courant qui a pour valeur :

$$P = \frac{4}{9} pb^2,$$

$$M f_0 = \frac{Pa^2}{2} (0.232 - 0.258\rho' + 0.049\rho''),$$

$$M f_1 = \frac{Pa^2}{2} (0.155 + 0.226\rho' - 0.144\rho''),$$

$$M f_2 = \frac{Pa^2}{2} (0.077 + 0.323\rho' + 0.141\rho'').$$

28. *Troisième cas.* Si la charge d'eau est représentée par un trapèze de bases b et $\frac{2b}{3}$ et de hauteur $\frac{b}{3}$, on trouve :

$$C' = \frac{b_3 - b_2}{6\mu} p \left[\frac{b_2 b^5{}_1 - b_1 b^5{}_2 + b_1 (b_2 - b_1)^5}{20}\right] = -\frac{1}{6\mu} \frac{29}{20} \frac{pb^7}{3^7},$$

$$C'' = \frac{b_3 - b_2}{6\mu} p \left\{\frac{b_3 b^5{}_1 - b_1 b^5{}_3 + b_1 (b_3 - b_1)^5}{20} + b_1 (b_3 - b_2)^2\right.$$

$$\left.\left[\frac{b_3 b^2{}_1}{2} + b_3 b_1 (b_3 - b_1) - \frac{b^3{}_1}{3} - \frac{b_1 (b^2{}_3 - b^2{}_1)}{2}\right]\right\} = \frac{1}{6\mu} \frac{434}{60} \frac{pb^7}{3^7},$$

$$D' = -\frac{pb_1}{m} \left[\frac{b_3 b^2{}_1}{2} + b^2 b_1 (b_3 - b_1) - \frac{b^3{}_1}{3} - \frac{b_1 (b^2{}_3 - b^2{}_1)}{2}\right] =$$

$$= -\frac{19}{6.3^2} pb^4, \qquad D'' = 0;$$

d'où l'on tire :

$$\psi_0 = \frac{88}{15.540} pb^2 = 0.01086 pb^2,$$

$$\psi_1 = \frac{777}{15.540} pb^2 = 0.09590 pb^2,$$

$$\varphi_1 = \frac{19}{27} \cdot \frac{3}{28} pb^2 = 0.08962 pb^2,$$

$$\varphi_2 = \frac{19}{27} \cdot \frac{2}{28} pb^2 = 0.05975 pb^2,$$

et par suite les équations

$$R'_0 + R''_0 = 0.07876 pb^2,$$

$$0.876 R'_0 + 2.932 R''_0 = 0.03617 pb^2;$$

d'où l'on déduit :

$$R'_0 = -\,0.0947 pb^2,$$
$$R''_0 = 0.01596 pb^2.$$

Si l'on passe ensuite à l'expression des moments fléchissants, et si l'on remarque que la charge totale par mètre courant a dans ce cas pour valeur :

$$P = \frac{5}{18} pb^2,$$

on obtient :

$$Mf_0 = \frac{Pa^2}{2}(0.3225 - 0.341\rho' + 0.057\rho''),$$

$$Mf_1 = \frac{Pa^2}{2}(0.215 + 0.299\rho' - 0.168\rho''),$$

$$Mf_2 = \frac{Pa^2}{2}(0.107 + 0.4253\rho' + 0.1645\rho''),$$

expressions où ρ' et ρ'' auront les mêmes valeurs que dans les deux cas précédents.

29. Pour comparer les résultats obtenus dans ces trois hypothèses, nous avons formé un tableau des valeurs des quantités φ, R′, R″ divisées par P, analogue au tableau donné déjà pour le cas de trois entretoises, qui permet de calculer facilement dans chaque cas les moments fléchissants maxima et les charges sur le seuil :

INDICATION des parties chargées.	VALEURS DES QUANTITÉS φ, R′, R″ DIVISÉES PAR LA CHARGE TOTALE dans les entretoises et sur le seuil.											
	1re entretoise.			2e entretoise.			3e entretoise.			Seuil.		
	φ_0	R'_0	R''_0	φ_1	R'_1	R''_1	φ_2	R'_2	R''_2	φ_3	R'_3	R''_3
Hauteur totale. .	0.214	−0.246	0.054	0.143	0.216	−0.159	0.071	0.306	0.156	0.572	−0.276	−0.051
2/3 de la hauteur.	0.232	−0.258	0.049	0.155	0.226	−0.144	0.077	0.323	0.141	0.536	−0.291	−0.046
1/3 de la hauteur.	0.322	−0.341	0.057	0.215	0.299	−0.168	0.107	0.425	0.164	0.356	−0.383	−0.05[illegible]

On voit par ce tableau :

1° Que la charge sur le seuil qui a en général pour expression

$$\varphi_3 + R'_3\rho' + R''_3\rho''$$

par mètre courant, est une fraction d'autant moindre de la charge totale que le niveau du bief d'aval s'élève davantage.

2° Que l'effort maximum dans la deuxième et la troisième entretoise, à égalité de charge totale, croît à mesure que le niveau s'élève.

Il suit de là que l'effort maximum qui se produit dans les entretoises pourra n'éprouver aucune diminution lorsque le niveau de l'eau s'élèvera en aval, si cette élévation reste au-dessous d'une certaine limite, ainsi que nous l'avions déjà constaté dans le cas de trois entretoises.

Le système des entretoises égales et également espacées avec bordage vertical offrira donc l'avantage de permettre au niveau du bief d'aval d'osciller entre certaines limites sans que l'effort maximum qui se produit dans les entretoises éprouve de variation sensible.

Cas de cinq entretoises.

30. Les équations (4) du § 7 se réduisent alors aux trois équations :

$$A'_0\pi_0 + A'_1\pi_1 + A'_2\pi_2 + C' =$$
$$= \int_0^x dx \int_a^x dx \int_0^x dx \int_a^x dx\,(M'_0\pi_0 + M'_1\pi_1 + M'_2\pi_2 + D'),$$

$$A''_0\pi_0 + A''_1\pi_1 + A''_2\pi_2 + C'' =$$
$$= \int_0^x dx \int_a^x dx \int_0^x dx \int_a^x dx\,(M''_0\pi_0 + M''_0\pi_1 + M''_2\pi_2 + D''),$$

$$A'''_0\pi_0 + A'''_1\pi_1 + A'''_2\pi_2 + C''' =$$
$$= \int_0^x dx \int_a^x dx \int_0^x dx \int_a^x dx\,(M'''_0\pi_0 + M'''_1\pi_1 + M'''_2\pi_2 + D'''),$$

ou, si l'on fait encore les intervalles entre les entretoises égaux et les entretoises d'égales dimensions, c'est-à-dire $b_1 = b_2 - b_1 = b_3 - b_2 = b_4 - b_3$ et $m_0 = m_1 = m_2 = m_3$, l'on aura :

$$A'_0 = \frac{6}{6.4^5.\mu} b^5, \quad A'_1 = \frac{1}{6.4^5.\mu} b^5, \quad A'_2 = 0,$$

$$A''_0 = \frac{24}{6.4^5.\mu} b^5, \quad A''_1 = \frac{8}{6.4^5.\mu} b^5, \quad A''_2 = \frac{1}{6.4^5.\mu} b^5,$$

$$A'''_0 = \frac{56}{6.4^5.\mu} b^5, \quad A'''_1 = \frac{24}{6.4^5.\mu} b^2, \quad A'''_2 = \frac{6}{6.4^5.\mu} b^5,$$

$$M'_0 = -\frac{1}{4^2.m} b^2, \quad M'_1 = \frac{2}{4^2.m} b^2, \quad M'_2 = -\frac{1}{4^2.m} b^2,$$

$$M''_0 = \frac{2}{4^2.m} b^2, \quad M''_1 = \frac{6}{4^2.m} b^2, \quad M''_2 = \frac{2}{4^2.m} b^2,$$

$$M'''_0 = -\frac{2}{4^2.m} b^2, \quad M'''_1 = \frac{4}{4^2.m} b^2, \quad M'''_2 = 0.$$

L'équation donnant les valeurs de $\frac{1}{\Omega^4}$ sera du troisième degré et pourra s'écrire toutes réductions faites :

$$56X^3 + 1962X^2 + 11664X + 6480 = 0,$$

en posant :

$$X = \frac{1}{4^3} \frac{m}{\mu} \frac{b^4}{\Omega^4},$$

équation dont les racines, toutes réelles et négatives, sont :

$$X' = -0.619, \quad X'' = -6.763, \quad X''' = -27.652.$$

On en déduira pour les rapports désignés par z_1, z_2, les valeurs :

$$z'_1 = -0.327, \quad z''_1 = -1.8985, \quad z'''_1 = -3.336,$$
$$z'_2 = -1.068, \quad z''_2 = -0.1736, \quad z'''_2 = -4.604.$$

31. Nous supposerons encore successivement une seule charge d'eau pressant l'une des faces de la porte sur toute sa hauteur, puis cette charge en partie équilibrée par une autre charge d'eau agissant sur le côté opposé, et s'élevant à la hauteur de l'une quelconque des entretoises intermédiaires.

Premier cas. Dans ce cas, comme dans les suivants, on trouvera que les valeurs des constantes désignées par C et D se présentent tout à fait sous la même forme que lorsqu'il y avait seulement quatre entretoises.

Les valeurs des ψ et φ seront donnés par les équations :

$$6\psi_0 + \psi_1 = \frac{90}{60.4^2} pb^2,$$

$$24\psi_0 + 8\psi_1 + \psi_2 = \frac{720}{60.4^2} pb^2,$$

$$56\psi_0 + 24\psi_1 + 6\psi_2 = \frac{2420}{60.4^2} pb^2,$$

$$-6\varphi_0 + 12\varphi_1 - 6\varphi_2 = 0,$$

$$12\varphi_0 + 36\varphi_1 + 12\varphi_2 = 0,$$

$$-18\varphi_0 + 24\varphi_2 = 0;$$

d'où l'on tire :

$$\psi_0 = 0.0048 pb^2, \qquad \varphi_0 = 0.0888 pb^2,$$
$$\psi_1 = 0.0644 pb^2, \qquad \varphi_1 = 0.0666 bp^2,$$
$$\psi_2 = 0.1160 pb^2, \qquad \varphi_2 = 0.0444 pb^2;$$

et par suite les équations donnant les valeurs de R'_0, R''_0, R'''_0 seront :

$$R'_0 + F''_0 + R'''_0 = 0.840 pb^2,$$
$$-0.327 R'_0 - 1.8985 R''_0 + 3.3362 R'''_0 = 0.0022 pb^2,$$
$$-1.068 R'_0 - 0.1736 R''_0 + 4.604\ R'''_0 = -0.0716 pb^2;$$

d'où l'on déduira pour les moments fléchissants maxima, en désignant encore par P la charge totale par mètre courant :

$$M f_0 = \frac{P a^2}{2} (0.1777 - 0.2210\rho' + 0.0716\rho'' - 0.0186\rho'''),$$

$$M f_1 = \frac{P a^2}{2} (0.1333 + 0.0722\rho' - 0.1358\rho'' + 0.062\rho'''),$$

$$M f_2 = \frac{P a^2}{2} (0.0888 + 0.2360\rho' - 0.0124\rho'' - 0.0856\rho'''),$$

$$M f_3 = \frac{P a^2}{2} (0.0444 + 0.1954\rho' + 0.1458\rho'' + 0.0596\rho'''),$$

où les quantités désignées par ρ seront les mêmes fonctions que précédemment de

$$K''^4 = 0.619 \frac{4^2.a^4\mu}{b^3 m}, \quad K'''^4 = 6,763 \frac{4^2.a^4\mu}{b^3 m}, \quad K''''^4 = 27,652 \frac{4^2.a^4\mu}{b^3 m}.$$

Le coefficient $\frac{a^4\mu}{b^3 m}$ dont dépend uniquement la répartition des charges entre les diverses entretoises pourra être encore pris pour la mesure de la roideur du système.

Il serait encore facile de voir qu'en donnant à ce coefficient des valeurs voisines de 0,30, on obtient pour les moments fléchissants maxima des valeurs peu différentes, de telle sorte qu'on peut, en établissant une proportion convenable entre les flexibilités du bordage et des entretoises, arriver à une répartition satisfaisante de la charge totale entre les diverses entretoises.

Pour les cas où les charges ont lieu en sens contraire sur les deux faces de la porte, nous n'entrerons pas dans le détail des calculs des quantités ψ, φ, R_0, et nous nous contenterons de résumer, dans un tableau semblable à celui du § 29, les valeurs des coefficients de ρ', ρ'', ρ''' et du terme indépendant, qui entrent dans l'expression du moment fléchissant maximum correspondant à chaque entretoise dans chaque cas, mise sous la forme générale :

$$M f_i = \frac{a^2}{2} \varphi_i + R'_i \rho' + R''_i \rho'' + R'''_i \rho'''.$$

INDICATION des parties chargées.	VALEURS DES QUANTITÉS φ_1 R'_1 R''_1 R''' DIVISÉES PAR LA CHARGE TOTALE DANS LES ENTRETOISES ET SUR LE SEUIL.																			
	1re entretoise.				2e entretoise.				3e entretoise.				4e entretoise.				Seuil.			
	φ_0	R'_0	R''_0	R'''_0	φ_1	R'_1	R''_1	R'''_1	φ_2	R'_2	R''_2	R'''_2	φ_3	R'_3	R''_3	R'''_3	φ_4	R'_3	R''_4	R'''_4
Hauteur totale.	0.178	—0.221	0.072	—0.019	0.133	0.072	—0.136	0.062	0.089	0.236	—0.012	—0.086	0.044	0.195	0.146	0.060	0 556	—0.283	—0.069	—0.017
3/4 de la hauteur.	0.186	—0.233	0.080	—0.023	0.140	0.076	—0.151	0.077	0.093	0.248	—0.014	—0.106	0.046	0.206	0.162	0.072	0.534	—0.298	—0.077	—0.020
1/2 de la hauteur.	0.207	—0.240	0.056	—0.010	0.166	0.078	—0.107	0.035	0.104	0.256	—0.010	—0.046	0.052	0.213	0 088	0.026	0.471	—0.307	—0.027	—0.004
1/4 de la hauteur.	0.235	—0.214	0.024	—0.014	0.176	0.070	—0.046	0.048	0.117	0.229	—0.004	—0.066	0.059	0.189	0.050	0.045	0.413	—0.274	—0.024	—0.0127

L'inspection de ce tableau conduit à des conclusions semblables à celles qui ont été déjà formulées dans le cas précédent, à savoir que la charge sur le seuil est une fraction d'autant moindre de la charge totale que le niveau de l'eau dans le bief d'aval est plus élevé, tandis que l'effort maximum dans les entretoises intermédiaires, à égalité de charge totale, croît à mesure que ce niveau s'élève. Le même tableau montre toutefois qu'il pourrait n'en être plus ainsi, si le niveau d'aval s'élevait jusqu'à la deuxième entretoise, à partir du haut, et que ρ', ρ'', ρ''' fussent voisins de l'unité, c'est-à-dire que la résistance du bordage à la flexion fût négligeable.

On remarquera, d'ailleurs, dans ce cas, comme dans les précédents, que, ρ étant une fonction décroissante de k^4, ρ'' et ρ''' sont généralement beaucoup plus petits que ρ', et comme de plus R_i''' est aussi généralement plus petit que R''_i et R'_i, on pourra ordinairement, pour peu que le bordage ait une certaine résistance à la flexion, négliger dans l'expression des moments fléchissants le dernier terme et parfois même l'avant-dernier terme du coefficient de $\frac{a^2}{2}$.

Cas de six entretoises.

32. Les équations (3) du § 7 seront alors au nombre de quatre, et si l'on suppose encore les intervalles entre les entretoises égaux et les entretoises d'égales dimensions, on aura, en conservant toujours les mêmes notations :

$$
\begin{array}{llll}
A'_0 = \dfrac{6b^5}{6.5^5.\mu}, & A'_1 = \dfrac{b^5}{6.5^5.\mu}, & A'_2 = 0\,, & A'_3 = 0, \\[2ex]
A_0'' = \dfrac{24b^5}{6.5^5.\mu}, & A''_1 = \dfrac{8b^5}{6.5^5.\mu}, & A''_2 = \dfrac{b^5}{6.5^2.\mu}, & A''_3 = 0, \\[2ex]
A_0''' = \dfrac{60b^5}{6.5^5.\mu}, & A'''_1 = \dfrac{27b^5}{6.5^5.\mu}, & A'''_2 = \dfrac{8b^5}{6.5^5.\mu}, & A'''_3 = \dfrac{b^5}{6.5^5.\mu}, \\[2ex]
A_0^{IV} = \dfrac{115b^5}{6.5^5.\mu}, & A_1^{IV} = \dfrac{60b^5}{6.5^5.\mu}, & A_2^{IV} = \dfrac{24b^5}{6.5^5.\mu}, & A_3^{IV} = \dfrac{6b^5}{6.5^5.\mu}, \\[2ex]
M_0' = -\dfrac{b^2}{5^2.m}, & M_1' = \dfrac{2b^2}{5^2.m}, & M'_2 = -\dfrac{b^2}{5^2.m}, & M'_3 = 0, \\[2ex]
M_0'' = -\dfrac{2b^2}{5^2.m}, & M_1'' = \dfrac{3b^2}{5^2.m}, & M''_2 = 0, & M''_3 = -\dfrac{b^2}{5^2.m}, \\[2ex]
M_0^{IV} = \dfrac{2b^2}{5^2.m}, & M_1''' = \dfrac{8b^2}{5^2.m}, & M'''_2 = \dfrac{3b^2}{5^2.m}, & M'''_3 = \dfrac{2b^2}{5^2.m}, \\[2ex]
M^{IV} = -\dfrac{4b^2}{5^2.m}, & M^{IV} = \dfrac{5b^2}{5^2.m}, & M_2^{IV} = 0, & M_3^{IV} = 0;
\end{array}
$$

et l'on est conduit, pour trouver les valeurs de $\frac{1}{\Omega^4}$ à l'équation du quatrième degré :

$$209X^4 + 10320X^3 + 120528X^2 + 294624X + 71280 = 0,$$

en posant :

$$X = \frac{1}{5^3}\,\frac{m}{\mu}\,\frac{b^3}{\Omega^4}.$$

Les racines de l'équation ci-dessus sont toutes réelles et négatives; ce sont :

$$X' = -0.2712,\ X'' = -2.9370,\ X''' = -12.828,\ X^{IV} = -33.3360.$$

Partant des valeurs trouvées pour X, on en déduira les quatre séries des rapports z_1, z_2, z_3, on trouvera :

$$
\begin{array}{llll}
z'_1 = -0.0345, & z''_1 = -1.2133, & z'''_1 = -2.5153, & z_1^{IV} = -\ \ 5.3680 \\
z'_2 = -0.7443, & z''_2 = -1.0987, & z'''_2 = -1.4153, & z_2^{IV} = -11.4210 \\
z'_3 = -0.9795, & z''_3 = \ \ 0.8027, & z'''_3 = \ \ 1.6385, & z_3^{IV} = -12.842
\end{array}
$$

L'expression du moment fléchissant maximum pour chaque entretoise aura encore pour expression, quelles que soient les charges :

$$Mf_i = \frac{a^2}{2}(\varphi_i + R_i'\rho' + R_i''\rho'' + R_i'''\rho''' + R_i^{\text{iv}}\rho^{\text{iv}}),$$

en désignant par ρ la même fonction que précédemment, où la variable k^4, déduite de $\frac{1}{\Omega^4}$, prendra successivement les quatre valeurs :

$$K'^4 = 0.2712 \frac{5^3}{4} \frac{a^4\mu}{b^3 m}, \quad K''^4 = 2.937 \frac{5^3}{4} \frac{a^4\mu}{b^3 m},$$

$$K'''^4 = 12.828 \frac{5^3}{4} \frac{a^4\mu}{b^3 m}, \quad K^{\text{iv}4} = 33.336 \frac{5^3}{4} \frac{a^4\mu}{b^3 m},$$

et par φ_i, R'_i, R''_i..... les mêmes quantités que précédemment.

33. Nous ne ferons cette fois qu'une seule hypothèse, celle d'une charge d'eau agissant d'un seul côté de la porte et sur toute sa hauteur, ce cas étant le plus habituel et celui qui présente seul un véritable intérêt, puisque nous avons vu que la charge totale pouvait diminuer dans de certaines limites, sans que l'effort maximum qui se produit dans les entretoises subît de diminution sensible.

On trouvera que les valeurs de ψ et de φ sont donnés par les équations :

$$6\psi_0 + \psi_1 = \frac{90}{5^2.60} pb^2,$$

$$24\psi_0 + 8\psi_1 + \psi_2 + \psi_3 = \frac{720}{5^2.60} pb^2,$$

$$60\psi_0 + 27\psi_1 + 8\psi_2 + \psi_3 = \frac{5060}{5^2.60} pb^2,$$

$$115\psi_0 + 60\psi_1\ 24\psi_2 + 6\psi_3 = \frac{8110}{5^2.60} pb^2,$$



et

$$-\varphi_0 + 2\varphi_1 - \varphi_2 = 0,$$
$$-2\varphi_0 + 3\varphi_1 - \varphi_3 = 0,$$
$$2\varphi_0 + 8\varphi_1 + 3\varphi_2 + 2\varphi_3 = \frac{5}{6} pb,$$
$$-4\varphi_0 + 5\varphi_1 = 0;$$

d'où l'on tire :

$$\psi_0 = 0.00341 pb^2, \qquad \varphi_0 = 0.07695 pb^2,$$
$$\psi_1 = 0.03952 pb^2, \qquad \varphi_1 = 0.06156 pb^2,$$
$$\psi_2 = 0.08191 pb^2, \qquad \varphi_2 = 0.04617 pb^2,$$
$$\psi_3 = 0,11282 pb^2, \qquad \varphi_3 = 0.03078 pb^2.$$

On en déduit, pour les équations donnant les valeurs de R'_0, R''_0, R'''_0, R^{IV} :

$$R_0' + R_0'' R_0''' + R_0^{IV} = 0.07354 pb^2,$$
$$-0.0345 R'_0 - 1.2133 R''_0 - 2.5153 R'''_0 - 5.3680 R_0^{IV} =$$
$$= 0.02204 pb^2,$$
$$-0.7443 R'_0 - 1.0987 R''_0 + 1.4153 R'''_0 + 11.421 R_0^{IV} =$$
$$= -0.03574 pb^2,$$
$$-0.9795 R'_0 + 0.8027 R''_0 + 1.6385 R'''_0 - 12.842 R_0^{IV} =$$
$$= -0.08204 pb^2;$$

et par suite :

$$R'_0 = -0.0987 pb^2,$$
$$R''_0 = \quad 0.0375 pb^2,$$
$$R'''_0 = -0.0130 pb^2,$$
$$R_0^{IV} = \quad 0.0019 pb^2.$$

On obtient ainsi pour les moments fléchissants maxima dans chaque entretoise :

$$Mf_0 = \frac{Pa^2}{2}(0.1539 - 0.1980\rho' + 0.0750\rho'' - 0.0260\rho''' + 0.0038\rho^{IV}),$$

$$Mf_1 = \frac{Pa^2}{2}(0.1231 + 0.0068\rho' - 0.0910\rho'' + 0.0654\rho''' - 0.0204\rho^{IV}),$$

$$Mf_2 = \frac{Pa^2}{2}(0.0923 + 0.1470\rho' - 0.0824\rho'' - 0.03686\rho''' - 0.0434\rho^{IV}),$$

$$Mf_3 = \frac{Pa^2}{2}(0.0615 + 0.1934\rho' + 0.0602\rho'' - 0.0426\rho''' - 0.0488\rho^{IV}),$$

$$Mf_4 = \frac{Pa^2}{2}(0.0308 + 0.1320\rho' + 0.1160\rho'' + 0.0640\rho''' + 0.0300\rho^{IV}).$$

34. On déduirait facilement de la discussion de ces expressions où ρ', ρ'', ρ''', ρ'''^{IV} sont des quantités décroissantes, cette conclusion qu'il est possible de disposer convenablement de la quantité $\frac{a^4\mu}{b^3m}$ qui mesure en quelque sorte la roideur du système, de telle sorte que l'effort maximum atteigne sa plus grande valeur sur telle entretoise qu'on voudra, à partir du seuil, et que cet effort maximum diffère peu d'une entretoise à l'autre.

Pour des valeurs de ρ' comprises entre 0.25 et 0.30, on reconnaîtrait que l'entretoise la plus chargée serait celle du milieu, et que l'effort maximum dans cette entretoise serait le même que si elle supportait, uniformément répartie sur toute sa longueur, une fraction de la charge totale comprise entre 0.12 et 0.14.

De plus, comme ρ'', ρ''', ρ^{IV} sont généralement très-petits en comparaison de ρ', et que dans l'expression de Mf_1 le coefficient de ρ' est lui-même très-petit, on voit que les efforts maxima qui se produisent sur la deuxième entretoise, à partir du sommet, varieront peu lorsqu'on fera varier la roideur du système représentée par le coefficient $\frac{a^4\mu}{b^3m}$.

On pourrait, en suivant la même marche, calculer la valeur des moments fléchissants minima dans chaque entre-

toise d'une porte où ces pièces, toujours d'égales dimensions et uniformément espacées, sont en plus grand nombre, et où la charge d'eau agit, soit sur un seul côté, soit sur deux côtés de la porte à la fois; mais les calculs, déjà très-compliqués dans le cas qui vient d'être traité, le sont encore plus lorsque le nombre des entretoises augmente, et nous allons voir qu'alors on peut leur substituer, sans erreur sensible, un système équivalent d'entretoises jointives infiniment minces, pour lequel on est conduit à des formules, d'un calcul assez simple, applicables d'ailleurs à un nombre quelconque d'entretoises égales et également espacées.

CHAPITRE IV.

HYPOTHÈSE D'UN NOMBRE INFINI D'ENTRETOISES JOINTIVES INFINIMENT MINCES.

35. Nous supposerons maintenant qu'il s'agisse d'un système formé par un nombre infini d'entretoises infiniment minces dans le sens de la hauteur et infiniment rapprochées, reliées par le même bordage que précédemment, et nous rechercherons dans cette nouvelle hypothèse l'expression des flèches et des moments fléchissants au milieu de chaque entretoise.

Quant à la charge, nous supposerons qu'elle est exclusivement produite par la pression de l'eau agissant sur toute la hauteur de la porte et d'un seul côté.

Cela posé, soit z la distance d'une entretoise au sommet de la porte pris pour origine des ordonnées;

x, la distance d'un bordage infiniment mince à la verticale qui passe par les extrémités des entretoises;

b, la hauteur totale du bordage;

a, la portée des entretoises;

y, la flèche en un point quelconque de coordonnées x et z;

π, la réaction qui s'exerce en chaque point de contact des entretoises et du bordage, rapportée en ce point à l'unité de surface;

m, le moment d'inertie d'un mètre de hauteur d'entretoises;

μ, le moment d'inertie d'un mètre de largeur de bordage, ces moments étant respectivement multipliés par les coefficients d'élasticité de la matière;

pz, la charge rapportée à l'unité de surface qui agit en chaque point du bordage.

L'expression du moment fléchissant en un point d'ordonnée z d'un bordage infiniment mince, situé à une distance x de la verticale qui passe par les extrémités des entretoises, sera :

$$\mu \frac{d^2y}{dz^2} dx.$$

D'autre part, le moment de la charge agissant sur le bordage depuis le sommet de la porte jusqu'au même point z aura pour expression :

$$dx \int_0^z pz_1 (z - z_1) dz_1,$$

z_1 étant une ordonnée quelconque moindre que z.

Enfin, le moment des réactions qui se produisent au contact des entretoises et du bordage entre les deux mêmes points s'exprimera par l'intégrale :

$$dx \int_0^z \pi (z - z_1) dz_1.$$

On pourra donc écrire l'égalité suivante, en tenant compte de ce que les réactions agissent en sens contraire des charges, et de ce qu'on peut supprimer le facteur commun dx :

$$(16)\quad \mu\frac{d^2y}{dz^2}=\int_0^z dz_1(z-z_1)(pz_1-\pi)=\int_0^z dz\int_0^z dz\,(pz-\pi),$$

d'après ce qui a été démontré au § 6.

Pour chaque entretoise, on a d'ailleurs l'équation :

$$(17)\qquad m\frac{d^2y}{dx^2}=\int_0^x dx\int_a^x \pi dx,$$

identique à celle qui a été posée pour des entretoises isolées.

De l'équation (16) on tire après deux intégrations successives par rapport à z :

$$y=\frac{1}{\mu}\left[\int_b^z dz\int_0^z dz\int_0^z dz\int_0^z dz(pz-\pi)+(z-b)\,\varphi(x)\right],$$

en ayant, d'autre part, égard à ce que y doit être nul pour $z=b$, et $\varphi(x)$ étant une fonction indépendante de z.

On tire de même de l'équation (17) :

$$y=\frac{1}{m}\int_0^x dx\int_a^x dx\int_0^x dx\int_a^x \pi dx,$$

en tenant compte de ce que pour $x=0$, $y=0$, et de ce que pour $x=a$, $\frac{dy}{dx}=0$, quel que soit z.

Égalant les deux expressions ci-dessus de la flèche en chaque point, on obtient :

$$(18)\qquad \frac{1}{m}\int_0^x dx\int_a^x dx\int_0^x dx\int_a^x \pi dx=$$
$$=\frac{1}{\mu}\left[\int_b^z dz\int_0^z dz\int_a^z dz\int_0^z dz\,(pz-\pi)+(z-b)\,\varphi(x)\right].$$

36. De cette équation différentiée successivement deux fois, puis trois fois, puis quatre fois, par rapport aux va-

riables z et x tour à tour, on déduit, en posant d'autre part $\frac{m}{\mu}=\tau^4$,

(19) $$\int_0^x dx \int_a^x \frac{d^2\pi}{dz^2}\,dx = -\tau^4 \int_0^z dz \int_0^z \frac{d^2\pi}{dx^2}\,dz.$$

(20) $$\int_a^x \frac{d^3\pi}{dz^3}\,dx = -\tau^4 \int_0^z \frac{d^3\pi}{dx^3}\,dz.$$

(21) $$\frac{d^4\pi}{dz^4} = -\tau^4\,\frac{d^4\pi}{dx^4}.$$

A ces équations, on joindra l'équation que l'on obtient en écrivant que la somme des moments de toutes les forces qui agissent sur un bordage, pris par rapport au seuil, est nulle. On obtiendra ainsi :

(22) $$\int_0^b (b-z)\,\pi dz = \int_0^b pz\,(b-z)\,dz = \frac{1}{6}\,pb^3.$$

Pour satisfaire à l'équation (21), on posera :

$$\pi = \chi(z) + \Sigma \mathrm{F}(\alpha x)\, f(\beta z),$$

$\chi(z)$ étant une fonction de z à déterminer, $\mathrm{F}(\alpha x)$ la fonction déjà considérée au § 10, et $f(\beta z)$ étant la fonction :

(23) $$f(\beta z) = \mathrm{M}\cos\beta z + \mathrm{N}\sin\beta z + \mathrm{P}e^{\beta z} + \mathrm{Q}e^{-\beta z}.$$

On vérifierait facilement que les équations (19), (20) (21) et (22) sont satisfaites si l'on a :

(24) $\chi(z) = \mathrm{A} + \mathrm{B}z,$ (25) $\frac{\mathrm{A}}{2} + \frac{\mathrm{B}b}{6} = \frac{1}{6}pb,$

(26) $$\beta^4 = 4\alpha^4\tau^4.$$

(27) $$-\mathrm{N} + \mathrm{P} - \mathrm{Q} = 0.$$

(28) $$-\mathrm{M}\cos\beta b - \mathrm{N}\sin\beta b + \mathrm{P}e^{\beta b} + \mathrm{Q}e^{\beta b} = 0.$$

(29) $$-\mathrm{M} + \mathrm{P} + \mathrm{Q} = 0.$$

On vérifiera de même que l'équation (18) est aussi satisfaite, si l'on pose, outre les équations de condition précédentes, les équations de condition suivantes :

$$(30)\qquad A + Bb = 0.$$

$$(31)\qquad \varphi(x) = -\frac{\mu}{m}\frac{A}{b}\left[\frac{(x-a)^4 - a^4}{1.2.3.4} - \frac{a^2(x-a)^2 - a^4}{1.2.1.2}\right].$$

$$(32)\qquad M\cos\beta b + N\sin\beta b + Pe^{\beta b} + Qe^{-\beta b} = 0.$$

$$(33)\qquad \sum\int_b^z dz\int_0^z dz\int_0^z dz\int_0^z f(\beta z) = (p - B)\frac{z^5 - b^5}{1.2.3.4.5} - A\frac{z^4 - b^4}{1.2.3.4}.$$

Or des équations de condition (25) et (30), on tire :

$$A = \frac{1}{2}pb, \qquad B = -\frac{1}{2}p.$$

D'autre part, les équations (27), (28), (29) et (32) conduisent à l'équation :

$$(34)\qquad \operatorname{tang}\beta b = \frac{e^{\beta b} - e^{-\beta b}}{e^{\beta b} + e^{-\beta b}},$$

équation transcendante, qui est résolue par un nombre infini de valeurs de βb.

37. Pour trouver ces valeurs, on construira d'abord les courbes représentées par les deux équations :

$$(35)\qquad y = \operatorname{tang} x.$$

$$(36)\qquad y = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

Ces deux courbes (*fig.* 5) passent toutes deux par l'origine des coordonnées où elles sont l'une et l'autre tangentes à une droite inclinée à 45°. La première comprend un nombre infini de branches identiques dont la période est le rapport de la circonférence au diamètre, et qui ont cha-

cune une asymptote parallèle à l'axe des y aux distances $\frac{\varpi}{2}, \frac{3\varpi}{2} \ldots, (2n+1)\frac{\varpi}{2}$.

La deuxième se compose de deux branches infinies ayant chacune une asymptote parallèle à l'axe des x à une distance égale à l'unité.

On voit à l'inspection de ces courbes que les racines de l'équation transcendante, lesquelles sont données par les abscisses des points de rencontre de la première série de courbes avec la deuxième courbe unique seront très-voisines de $\frac{5\pi}{4}, \frac{9\pi}{4} \ldots$, et se rapprocheront de plus en plus de ces quantités à mesure que l'on s'éloignera de l'origine, à cause de la rapidité avec laquelle la deuxième courbe converge vers son asymptote, les points où la série des premières courbes rencontre cette asymptote ayant pour abscisses :

$$\text{arc tang } 1 = n\varpi + \frac{\varpi}{4}.$$

Pour trouver des valeurs approchées de ces racines, on posera :

$$x = n\omega + \frac{\varpi}{4} - x',$$

x' étant très-petit d'après la remarque précédente.

On tirera de là :

$$\text{tang} x = \text{tang}\left(n\varpi + \frac{\varpi}{4} - x'\right) = \frac{1 - \text{tang} x'}{1 + \text{tang} x'} = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}};$$

d'où

$$\text{tang} x' = e^{-2\left(n\varpi + \frac{\varpi}{4} - x'\right)} = \frac{2x'}{e^{2n\varpi + \frac{\varpi}{4}}},$$

x' étant très-petit, $e^{2x'}$ est très-voisin de 1 et tgx', très-peu

différent de x'. On a donc très-approximativement :

$$x' = \frac{1}{e^{2n\varpi + \frac{\varpi}{4}}},$$

d'où pour :

$$\begin{matrix} n=1 & n=2 & n=3 & n=4 \\ x'_1=0.0003886, & x'_2=0.000000578, & x'_3=0.000000, & x'_4=0.000000 \end{matrix}$$

et

$$x=3.92660,\ x_2=7.06858,\ x_3=10.21017,\ x_4=13.35176$$

Ayant ainsi trouvé la série des valeurs de βb satisfaisant à l'équation (34), on en déduira pour chacune d'elles un système de valeurs des rapports $\frac{N}{M}, \frac{P}{M}, \frac{Q}{M}$, au moyen des équations (27), (28) et (29). Ces valeurs exprimées en fonction de βb sont :

$$\frac{N}{M} = -\cot\beta b, \quad \frac{P}{M} = \frac{1-\cot\beta b}{2}, \quad \frac{Q}{M} = \frac{1+\cot\beta b}{2},$$

et il ne reste plus à déterminer que les valeurs de M correspondant à chaque valeur de βb pour que tous les termes qui entrent dans l'expression de π soient connus.

38. A cet effet, on se servira de l'équation (33) qui doit être satisfaite pour z quelconque.

Prenons les dérivées 4es par rapport à z des deux membres de cette équation nous aurons :

$$(38) \qquad \Sigma f(\beta z) = (p - B)z - A.$$

Supposons que le premier membre de cette équation soit développé suivant les puissances croissantes de z, ce qui est possible puisque chaque fonction représentée par $f(\beta z)$ ne contient que des termes tels que $\cos\beta z$, $\sin\beta z$, $e^{\beta z}$, $e^{-\beta z}$,

multipliés chacun par des coefficients numériques toujours finis, les coefficients des puissances successives de z, à un facteur numérique près, ne seront autres que les dérivées successives du premier membre où l'on aura fait $z = 0$.

Si l'on dispose de la série des valeurs de M, que nous désignerons par M_1, M_2, $M_3 \ldots$, de telle sorte que pour $z = 0$, les deux membres de l'équation ci-dessus soient égaux, ainsi que la série de leurs dérivées, on pourra affirmer que le développement du premier membre suivant les puissances croissantes de z, développement qui peut donner une valeur aussi approchée que l'on veut de ce premier membre, si on le pousse assez loin, est identique à la somme des termes du deuxième membre, et par suite que les membres sont identiquement égaux pour toutes les valeurs de z.

Cette identité une fois établie entre les deux membres de l'équation (38), on en déduira facilement, par des intégrations successives, l'identité des deux membres de l'équation (33).

39. Or les équations que l'on obtiendra en égalant les deux membres de l'équation (38) et la série de leurs dérivées pour $z = 0$ seront :

$$(39)\left\{\begin{array}{ll}
\Sigma(M+P+Q) = -\frac{1}{2}pb & \\
\Sigma\beta b(N+P-Q) = \frac{3}{2}pb & \\
\Sigma\beta^2 b^2(-M+P+Q) = 0 & \multirow{2}{*}{} \\
\Sigma\beta^3 b^3(-N+P-Q) = 0 & \\
\Sigma\beta^4 b^4(M+P+Q) = 0 & \\
\Sigma\beta^5 b^5(N+P-Q) = 0 & \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots &
\end{array}\right.$$

(Les 3e et 4e : équations identiquement satisfaites en vertu de (27) et (29).)

équations qui peuvent s'écrire en négligeant les équations identiques et remplaçant N, P, Q par leurs valeurs en fonction de M :

$$(40)\left\{\begin{array}{l}
2(M_1+M_2+M_3+M_4+\ldots\ldots)=-\frac{1}{2}pb\\
2(M_1\beta_1 b\cot\beta_1 b+M_2\beta_2 b\cot\beta_2 b+M_3\beta_3 b\cot\beta_3 b+\\
\quad+M_4\beta_4 b\cot\beta_4 b+\text{---})=-\frac{3}{2}pb\\
2(M_1\beta_1^4 b^4+M_2\beta_2^4 b^4+M_3\beta_3^4 b^4+M_4\beta_4^4 b^4+\ldots\ldots)=0\\
2(M_1\beta_1^5 b^5\cot\beta_1 b+M_2\beta_2^5 b^5\cot\beta_2 b+\ldots\ldots)=0\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}\right.$$

Il s'agit de trouver une série de valeurs M_1, M_2, M_3....., satisfaisant à ces équations successives en nombre infini.

Pour cela, nous procéderons par approximations successives. Ne considérant d'abord que les deux premières équations de la série où l'on supprimera toutes les inconnues, à l'exception de M_1 et M_2, nous tirerons M_1 et M_2 de ces deux équations. Ayant obtenu les valeurs de M_1 et M_2, si l'on veut trouver le système des valeurs de M_1, M_2, M_3, M_4 satisfaisant aux quatre premières équations de la série où l'on s'arrête aux quatre premières inconnues, on portera les valeurs de M_1 et M_2 précédemment trouvées dans la troisième et la quatrième équation, et on en déduira des valeurs de M_3 et M_4, très-petites par rapport à M_1 et M_2, les coefficients dont M_3 et M_4 sont affectés étant très-grands par rapport à ceux de M_1 et M_2 dans les mêmes équations. Il suit de là que si l'on porte ces valeurs de M_3 et de M_4 ainsi que les valeurs précédemment trouvées pour M_1 et M_2 dans les deux premières équations de la série, les deux membres de chacune de ces équations différeront fort peu. Les valeurs de M_1 et M_2 résolvant réellement avec des valeurs convenables de M_3 et M_4, les quatre premières équations, différeront donc aussi fort peu des valeurs obtenues au moyen des deux premières équations seulement, et les valeurs de M_3 et M_4, faisant partie du même système, seront très-petites par rapport à celles de M_1 et M_2.

En poursuivant ainsi, on arrivera à voir que, si l'on

prend dans la série des équations de condition précédemment posées un nombre de plus en plus grand d'équations, et que l'on cherche à y satisfaire au moyen d'un nombre égal d'inconnues M_1, M_2, M_3....., on obtiendra pour ces quantités une série de valeurs décroissant indéfiniment, qui n'éprouveraient, à mesure que l'on fera croître le nombre des équations, que des variations de moins en moins sensibles.

Or, à mesure que les quantités M_1, M_2, M_3...,. satisfont à un plus grand nombre d'équations (40), l'identité du développement, suivant les puissances croissantes de z, des deux membres de l'équation (38) s'étend sur un plus grand nombre de termes, l'expression $\Sigma f(\beta z)$ que les quantités M_1, M_2, M_3.... servent à composer, tend de plus en plus à satisfaire, pour toutes les valeurs de z, à l'équation (33), et la fonction π, où entrent les fonctions partielles désignées par $f(\beta z)$, est de plus en plus près de satisfaire à toutes les conditions du problème.

On pourra donc, avec une très-grande approximation, obtenir les premiers termes du développement, suivant les valeurs croissantes de l'argument βb, de la valeur complète de la fonction π en ne résolvant qu'un nombre assez limité d'équations (40).

40. Si, tout d'abord, on ne prend que les premières équations (40), où l'on remplace cot βb et βb par leurs valeurs pour chacun des indices 1, 2, 3..... , ce qui donne :

$$M_1 + M_1 = -\frac{1}{4} pb,$$

$$3.9296 M_1 + 7.0685 M_2 = -\frac{3}{4} pb,$$

on trouve :

$$M_1 = -0.32 pb, \qquad M_2 = 0.07 pb.$$

Si l'on pousse jusqu'à la quatrième équation inclusivement, on obtient :

$$M_1 + M_2 + M_3 + M_4 + \ldots\ldots = -\frac{1}{4}pb,$$

$$3.9296\,M_1 + 7.0685\,M_1 + 10.210\,M_3 + 13.352\,M_4 = -\frac{3}{4}pb,$$

$$238\,M_1 + 2496\,M_2 + 10867\,M_3 + 31780\,M_4 = 0,$$

$$238\,.\,3.9296\,M_1 + 2496\,.\,7.0685\,M_2 + 10867.10210\,M_3 + \\ + 31780\,.\,13.352\,M_4 = 0,$$

équations d'où l'on tire :

$$M_1 = -0.353\,pb, \qquad M_2 = 0.135\,pb, \qquad M_3 = -0.044\,pb, \\ M_4 = -0.009\,pb.$$

On voit qu'en prenant deux équations de plus, on n'a obtenu pour M_1 qu'une valeur assez peu différente de la première. Si l'on en prenait un plus grand nombre, la différence serait encore moins sensible.

Quel que soit d'ailleurs le nombre d'équations que l'on prenne, on reconnaîtrait facilement, en les résolvant par la méthode de substitution, que les valeurs toujours croissantes qu'elles fournissent pour M_1, M_2, $M_3\ldots$ sont alternativement positives et négatives, de telle sorte que les valeurs de ces quantités correspondant à un nombre infini d'équations forment une série convergente.

41. Si l'on s'arrête aux quatre dernières valeurs trouvées M_1, M_2, M_3, M_4, on en déduit pour l'expression générale de π :

$$(41)\ \varpi = \frac{1}{2}p(b-z) - pb[0.353\,F(\alpha_1 x)f(\beta_1 z) - 0.135\,F(\alpha_2 x)f(\beta_2 z) + \\ + 0.044\,F(\alpha_3 x)f(\beta_3 z) - 0.009\,F(\alpha_4 z)\ldots\ldots],$$

expression où l'on a :

$$F(\alpha x) = \frac{\cos\alpha a(e^{\alpha a}+e^{-\alpha a})\cos\alpha(x-a)\left[e^{\alpha(x-a)}+e^{-\alpha(x-a)}\right]+\sin\alpha a(e^{\alpha a}-e^{-\alpha a})\sin\alpha(x-a)\left[e^{\alpha(x-a)}-e^{-\alpha(x-a)}\right]}{2\cos 2\alpha a+e^{2\alpha a}+e^{-2\alpha a}}.$$

$$f(\beta z) = \cos(\beta z) - \cot\beta b \sin(\beta z) + \frac{1-\cot\beta b}{2} e^{\beta z} + \frac{1+\cot\beta b}{2} e^{-\beta z},$$

$$\alpha^4 = \frac{\beta^4}{4\tau^4},$$

$$\beta_1 b = 4.92660, \quad \beta_2 b = 7.06858, \quad \beta_3 b = 10.21020, \quad \beta_4 b = 13.35176.....$$

et par suite :

$$\alpha^4{}_1 = \frac{59.5}{2^4 b^4}, \quad \alpha^4{}_2 = \frac{624}{2^4 b^3}, \quad \alpha^4{}_3 = \frac{2717}{2^4 b^4}, \quad \alpha^4{}_4 = \frac{7945}{2^4 b^4}.$$

La série des valeurs de $f(\beta z)$ restant toujours finies, lorsque β croît indéfiniment, tandis que les valeurs de $F(\alpha x)$, pour une valeur quelconque de x différente de o, décroissent de plus en plus vite, la série des termes dont l'ensemble forme le multiplicateur de pb dans la deuxième partie de l'expression de π sera convergente, et permettra de calculer, avec telle approximation que l'on voudra, la valeur de cette expression, en prenant un nombre de termes assez grand.

42. On peut, d'ailleurs, vérifier que l'expression de π ci-dessus trouvée devient égale à celles que l'on obtient directement pour la charge des entretoises par mètre quarré en chaque point, lorsque l'on suppose successivement la résistance du bordage à la flexion infinie, puis nulle par rapport à celle des entretoises.

Dans le premier de ces deux cas, l'expression de π, calculée directement, serait $\frac{1}{2} p(b-z)$. C'est la valeur que donne la formule ci-dessus pour $\tau^4 = 0$; car alors toutes les valeurs de α sont infinies, et il est facile de voir que $F(\alpha x)$ devient nul pour toute valeur de x différente de o si l'on y fait $\alpha = \infty$; d'où il suit que l'expression de π se réduit à sa première partie $\frac{1}{2} p(b-z)$.

43. Dans le cas où la résistance du bordage à la flexion est nulle par rapport à celle des entretoises, τ^4 est infini, α^4, toujours nul et $F(\alpha x)$ toujours égal à l'unité. La deuxième partie du second membre de l'équation a alors pour valeur, en vertu de l'équation (36)

$$\Sigma f(\beta z) = \frac{p}{2}(3z - b);$$

d'où l'on déduit :

$$\pi = pz,$$

ainsi que l'on devait s'y attendre.

Si l'on construit d'autre part par points, en donnant, par exemple, à z des valeurs croissant par dixièmes de b, la courbe représentée par l'équation

$$\pi = \frac{1}{2}p(b-z) - pb[0.353f(\beta_1 z) - 0.135f(\beta_2 z) + 0.044f(\beta_3 z) - \\ - 0.009f(\beta_4 z)] \ldots\ldots$$

donnant la valeur de π, lorsque τ^4 devient infini, on constate que la courbe ainsi obtenue (*fig.* 4) coïncide sensiblement avec la ligne droite définie par l'équation

$$\pi = pz,$$

sauf pour des valeurs de z, peu différentes de b.

Cet écart tient à ce que, indépendamment de l'inexactitude résultant de l'erreur dont peuvent être affectés les premiers coefficients de la deuxième partie de l'expression ci-dessus, et de ce que l'on s'arrête à ces premiers coefficients, la courbe continue, qui représente l'effort par mètre quarré désigné par π tendant à faire fléchir en chaque point chaque entretoise infiniment étroite, devant couper l'axe des abscisses pour $z = b$, puisque cet effort est nul au droit du seuil, s'écarte nécessairement de la droite définie par l'équation

$$\pi = pz,$$

lorsqu'on donne à z des valeurs se rapprochant de b.

44. Ayant obtenu l'expression générale de π, on en déduira pour celle du moment fléchissant par mètre de hauteur en chaque point d'une entretoise infiniment étroite :

$$(42)\quad \int_0^x dx \int_a^x dx = \frac{1}{2} pb \left\{ \left[\frac{(x-a)^2 - a^2}{2}\right]\left[1 - \frac{z}{b}\right] + 0.706\,\chi(\alpha_1 x) f(\beta_1 z) - \right.$$
$$\left. - 0.270\,\chi(\alpha_2 x) f(\beta_2 z) + 0.088\,\chi(\alpha_3 x) f(\beta_3 z) \ldots\ldots \right\},$$

en désignant par $\chi(\alpha x)$ l'expression :

$$\chi(\alpha x) = \frac{[e^{\alpha a} + e^{-\alpha a}] \cos\alpha a . \sin\alpha(x-a) [e^{\alpha(x-a)} - e^{-\alpha(x-a)}] - [e^{\alpha a} - e^{-\alpha a}] \sin\alpha a \cos\alpha(x-a) [e^{\alpha(x-a)} + e^{-(x-a)}]}{2\alpha^2 [e^{2\alpha a} + e^{-2\alpha a} + 2\cos 2\alpha a]},$$

d'où l'on tire pour le moment fléchissant maximum correspondant à $x = a$, en posant comme précédemment :

$$\frac{2 \sin\alpha a (e^{\alpha a} - e^{a\alpha})}{\alpha^2 a^2 (e^{2\alpha a} + e^{-2\alpha\alpha} + 2\cos 2\alpha a)} = \rho.$$

$$(43)\quad Mf = \frac{pa^2 b}{4} \left\{ 1 - \frac{z}{b} - z[0.706 \rho_1 f(\beta_1 z) + 0.270 \rho_2 f(\beta_2 z) - \right.$$
$$\left. - 0.088 \rho_3 [(\beta_3 z) + \ldots.] \right\}.$$

45. Au moyen de cette expression, si l'on a calculé une fois pour toutes, pour des valeurs de z assez rapprochées, croissant par exemple par dixièmes, les valeurs de $f(\beta_1 z)$, $f(\beta_2 z)$...... multipliées respectivement par les coefficients numériques dont ces fonctions sont affectées, on pourra obtenir, soit directement, soit par interpolation, les moments fléchissants maxima par mètre de hauteur pour chaque entretoise infiniment étroite en substituant à ρ_1, ρ_2, ρ_3... leurs valeurs dans lesquelles l'argument précédemment désigné par $k^4 = \alpha^4 a^4$ devient successivement :

$$k^4_1 - \frac{59{,}5 a^4 \mu}{b^4 m},\ k^4_2 = \frac{624 a^4 \mu}{b^4 m},\ k^4_3 = \frac{2717 a^4 \mu}{b^4 m},\ k^4_4 = \frac{7945 a^4 \mu}{b^4 m}.$$

Nous donnons ci-dessous, pour des valeurs de z croissant par dixièmes, le tableau de ces valeurs du moment fléchissant maximum exprimées en fonction de $\rho_1, \rho_2, \rho_3 \ldots$

$$Mf_0 = \frac{pa^2b}{4}\left\{ 1.00 - 1.412\rho_1 + 0.540\rho_2 - 0.176\rho_3 \ldots\ldots \right\}$$

$$Mf_1 = \frac{pa_2b}{4}\left\{ 0.90 - 0.864\rho_1 + 0.163\rho_2 - 0.002\rho_3 \ldots\ldots \right\}$$

$$Mf_2 = \frac{pa^2b}{4}\left\{ 0.80 - 0.322\rho_1 - 0.161\rho_2 + 0.097\rho_3 \ldots\ldots \right\}$$

$$Mf_3 = \frac{pa^2b}{4}\left\{ 0.70 + 0.167\rho_1 - 0.344\rho_2 + 0.086\rho_3 \ldots\ldots \right\}$$

$$Mf_4 = \frac{pa^2b}{4}\left\{ 0.60 + 0.565\rho_1 - 0.330\rho_2 + 0.016\rho_3 \ldots\ldots \right\}$$

$$Mf_5 = \frac{pa^2b}{4}\left\{ 0.50 + 0.824\rho_1 - 0.140\rho_2 - 0.120\rho_3 \ldots\ldots \right\}$$

$$Mf_6 = \frac{pa^2b}{4}\left\{ 0.40 + 0.933\rho_1 + 0.123\rho_2 - 0.110\rho_3 \ldots\ldots \right\}$$

$$Mf_7 = \frac{pa^2b}{4}\left\{ 0.30 + 0.880\rho_1 + 0.332\rho_2 - 0.084\rho_3 \ldots\ldots \right\}$$

$$Mf_8 = \frac{pa^2b}{4}\left\{ 0.20 + 0.688\rho_1 + 0.383\rho_2 + 0.111\rho_3 \ldots\ldots \right\}$$

$$Mf_9 = \frac{pa^2b}{4}\left\{ 0.10 + 0.374\rho_1 + 0.152\rho_2 + 0.110\rho_3 \ldots\ldots \right\}$$

Le tableau n° 1 des valeurs de ρ correspondant à la série des valeurs de l'argument k^4, qui fait suite à ce mémoire, permettra d'obtenir immédiatement les valeurs de ces expressions.

46. Il résulte de ce tableau, que pour peu que k_1^4 atteigne la valeur 0.05, k_2^4, k_3^4, k_4^4 prenant alors les valeurs 0.50, 2.25. 6.60,... les valeurs de ρ_1, ρ_2, ρ_3 forment une série dont les termes décroissent assez rapidement, d'autant plus rapidement que k_1^4 est plus considérable, et l'on peut s'arrêter, sans erreur sensible dans le calcul des ex-

pressions ci-dessus, aux termes contenant ρ_1, ρ_2 et ρ_3, les coefficients de ρ allant d'ailleurs eux-mêmes en décroissant dans chacune de ces expressions.

Si les valeurs de k_1^4 étaient extrêmement petites, ce qui reviendrait à supposer la résistance du bordage vertical à la flexion extrêmement faible, les différentes valeurs de ρ décroîtraient avec lenteur; on ne pourrait plus se contenter des premiers termes de la série de ces valeurs pour calculer avec une exactitude suffisante pour toutes les valeurs de z les moments fléchissants maxima au moyen des expressions ci-dessus, et il résulte en outre de la remarque qui a été faite à la fin du paragraphe précédent, qu'il régnerait alors une certaine incertitude au sujet de l'application de la formule (41), et par suite aussi de la formule (43) pour des valeurs de z voisines de b.

On sera donc prévenu par la lenteur de la décroissance des valeurs de ρ qu'il n'y a plus à compter sur l'influence du bordage pour diminuer les efforts qui tendent à se produire dans les entretoises, l'écart insensible qui existe alors entre les charges des entretoises supérieures, calculées indépendamment de la résistance du bordage, puis obtenues par les formules ci-dessus, montrant d'ailleurs que ces dernières entretoises ne tendent pas à soulager les entretoises inférieures.

47. On s'est servi de ces dernières formules pour calculer, pour une série de valeurs croissantes de l'argument k_1^4, les valeurs du coefficient de $\frac{pa^2b}{4}$ dans les expressions des moments fléchissants maxima correspondant à chaque dixième de la hauteur de la porte.

On voit à l'inspection de ce tableau portant le n° 2 à la suite de ce mémoire :

1° Que le coefficient de $\frac{pa^2b}{4}$, dans l'expression du moment fléchissant maximum pour l'entretoise située à une

distance du sommet un peu moindre que les trois dixièmes de la hauteur totale, varie peu lorsque l'on fait varier k_1^4, et que la valeur de k_1^4, pour laquelle le maximum maximorum des moments fléchissants pour toutes les entretoises sera le plus faible, est 3.50 environ. Ce maximum, qui a alors pour valeur $0.75\,\frac{pa^2b}{4}$, et qui répond aux 0.40 de la hauteur totale de la porte environ, varie fort peu lorsque k_1^4 varie entre 3.50 et 6, et ne fait que se déplacer un peu ;

2° Que pour cette même valeur de k_1^4 les coefficients de $\frac{pa^2b}{b}$ dans l'expression des moments fléchissants maxima diffèrent peu d'une entretoise à l'autre ;

3° Qu'à mesure que k_1^4 augmente, le maximum maximorum des moments fléchissants se rapproche du sommet de la porte, ainsi qu'on pouvait le prévoir.

Nous verrons plus loin quel parti l'on peut tirer dans la pratique de ces résultats.

48. Si la charge d'eau, au lieu d'être représentée par un triangle, ainsi que nous l'avons supposé jusqu'à présent, était représentée par un trapèze, on arriverait, en remplaçant le trapèze par une courbe parabolique définie par une équation de la forme :

$$y = z(1 + \alpha z^m + \beta z^n + \gamma z^q)\ldots\ldots,$$

qui, si l'on dispose convenablement des exposants et des coefficients, peut se rapprocher autant que l'on veut du trapèze, et en suivant une méthode analogue à celle qui a conduit à la détermination de π dans le cas précédent, à trouver pour cette quantité, et par suite pour les moments fléchissants maxima, de nouvelles expressions de même forme que les précédentes qui permettraient de les calculer.

On verrait ainsi que, pour un nombre infini d'entre-

toises infiniment minces, de même que pour un petit nombre d'entretoises de dimensions finies également espacées, il peut arriver que le niveau de l'eau en aval d'une porte d'écluse s'élève sans que la charge des entretoises les plus fatiguées diminue sensiblement, ce qui rend sans intérêt la recherche de formules applicables à ce cas.

CHAPITRE V.

EXTENSION DES FORMULES AU CAS D'ENTRETOISES NON JOINTIVES EN NOMBRE QUELCONQUE.

49. Si au lieu d'avoir des entretoises jointives infiniment étroites, on a seulement des entretoises également espacées, en nombre assez grand, on peut encore, avec une certaine approximation, se servir des résultats obtenus au chapitre précédent pour calculer les moments fléchissants maxima dans les entretoises.

En effet, les entretoises étant supposées d'abord jointives et infiniment étroites, on peut (*fig.* 5) les partager suivant la hauteur en un certain nombre d'intervalles égaux, 10, par exemple, et les remplacer approximativement par 10 entretoises distinctes dont l'axe coïncide avec les divisions des intervalles, et dont la hauteur soit égale à celle de ces intervalles.

Cette substitution, qui aura pour effet de rendre solidaires dans chaque intervalle les entretoises infiniment étroites qui le composent, ce qui, en raison du nombre de ces intervalles, ne peut modifier que fort peu la manière dont chacune d'elles se comporte sous la charge qui lui est transmise, ne pourra entraîner d'erreur un peu sensible que pour les entretoises extrêmes; car, en opérant ainsi, c'est comme si l'on supprimait une demi-entretoise au-dessous du seuil, et que l'on relevât de la même hauteur le sommet de la porte ou du cadre formé par les entretoises.

Il est d'ailleurs évident qu'à mesure que le nombre des entretoises augmentera, l'erreur résultant de ces modifications sera de plus en plus faible, et la répartition de la charge totale entre les diverses entretoises en sera d'autant moins affectée.

50. On peut avoir une limite de l'erreur commise en comparant dans les deux hypothèses des entretoises jointives infiniment minces ou séparées, les résultats obtenus pour six entretoises y compris le seuil.

Nous transcrirons à cet effet les formules trouvées dans le cas de cinq entretoises séparées équidistantes, et en regard les moments fléchissants maxima répondant à chaque cinquième de la hauteur totale dans le cas des entretoises jointives, moments qui dans le chapitre précédent ont été rapportés à l'unité de hauteur, et qui doivent par conséquent être multipliés chacun par $\frac{1}{5}b$ pour donner la valeur approximative des moments fléchissants maxima pour $\frac{1}{5}$ de la hauteur totale. Dans ces formules, nous avons désigné pour plus de simplicité le quotient de la division de Mf_0 par $\frac{pa^2b^2}{4}$, par μf_0.

Entretoises séparées.

$$\mu f_0 = 0.154 - 0.198\rho' + 0.075\rho'' - 0.026\rho''' + 0.004\rho^{\text{IV}}$$
$$\mu f_1 = 0.123 + 0.007\rho' - 0.091\rho'' + 0.065\rho''' - 0.020\rho^{\text{IV}}$$
$$\mu f_2 = 0.092 + 0.147\rho' - 0.082\rho'' - 0.037\rho''' + 0.043\rho^{\text{IV}}$$
$$\mu f_3 = 0.065 + 0.193\rho' + 0.060\rho'' - 0.043\rho''' - 0.049\rho^{\text{IV}}$$
$$\mu f_4 = 0.031 + 0.132\rho' + 0.116\rho'' + 0.061\rho''' + 0.030\rho^{\text{IV}}$$

Entretoises jointives.

$$\mu f_0 = 0.20 - 0.282\rho_1 + 0.108\rho_2 - 0.035\rho_3 + \ldots..$$
$$\mu f_1 = 0.16 - 0.064\rho_1 - 0.032\rho_2 + 0.019\rho_3 + \ldots..$$
$$\mu f_2 = 0.12 + 0.113\rho_1 - 0.066\rho_2 + 0.003\rho_3 + \ldots..$$
$$\mu f_3 = 0.08 + 0.186\rho_1 + 0.024\rho_2 - 0.022\rho_3 + \ldots..$$
$$\mu f_4 = 0.04 + 0.136\rho_1 + 0.076\rho_2 + 0.022\rho_3 + \ldots..$$

51. Dans ces deux séries de formules, les variables dont les quantités désignées par ρ sont des fonctions, ne doivent pas être prises avec les mêmes valeurs.

On a d'une part, dans la première série de formules (voir § 32) :

$$k'^4 = \frac{5^3}{4} 0.271 \frac{a^4\mu}{mb^3} \quad k''^4 = \frac{5^3}{4} 2.937 \frac{a^4\mu}{mb^3} \quad k'''^4 = \frac{5^3}{4} 12.828 \frac{a^4\mu}{mb^3} \dots\dots$$

pour les valeurs de k^4 entrant dans les fonctions ρ.

Les valeurs de la même variable, dans la deuxième série de formules, sont :

$$k^4{}_1 = \frac{238}{4} \frac{a^4}{\tau^4 b^4} \quad k^4{}_2 = \frac{2496}{4} \frac{a^4}{\tau^4 b^4} \quad k^4{}_3 = \frac{10867}{4} \frac{a^4}{\tau^4 b^4},$$

τ^4 étant le rapport des résistances à la flexion des entretoises et du bordage dans le second cas.

Faisant toutes les réductions dans ces deux séries d'expressions, on obtient :

$$k'^4 = 8.475 \frac{a^4\mu}{mb^3} \qquad k_1{}^4 = 59.5 \frac{a^4}{z^4 b^4}$$

$$k''^4 = 91.80 \frac{a^4\mu}{mb^3} \qquad k^4{}_2 = 628 \frac{a^4}{z^4 b^4}$$

$$k'''^4 = 400.87 \frac{a^4\mu}{mb^3} \qquad k^4{}_3 = 2717 \frac{a^4}{z^4 b^4}.$$

Or, s'il s'agit de comparer les résultats fournis par les deux séries de formules, en désignant par e l'épaisseur des entretoises, par ε celle du bordage supposées les mêmes dans les deux cas, et par h' la hauteur des entretoises séparées, on devra faire $h' = \frac{1}{5} b$ et

$$\frac{\mu}{m} \frac{\frac{1}{12}\varepsilon^3}{\frac{1}{12} h'e^3} = \frac{be^3}{5\varepsilon^3},$$

On pourra donc écrire d'une part :

$$k'^4 = 42.375\,\frac{a^4\varepsilon^2}{b^4\varepsilon^3} \quad k''^4 = 459\,\frac{a^4\varepsilon^3}{b^4e^3} \quad k'''^4 = 2000\,\frac{a^4\varepsilon^3}{b^4e^3},$$

et d'autre part :

$$k^4{}_1 = 59.5\,\frac{a^4\varepsilon^3}{b^4e^3} \quad k^4{}_2 = 628\,\frac{a^4\varepsilon^3}{b^4e^3} \quad k^4{}_3 = 2717\,\frac{a^4\varepsilon^3}{b^4e^3},$$

d'où l'on déduit les rapports :

$$\frac{k'^4}{k_1{}^4} = \frac{42.375}{39.5} = 0.712 \quad \frac{k''^4}{k^4{}_2} = \frac{459}{628} = 0.730 \quad \frac{k'''^4}{k_3{}^4} = \frac{2000}{2717} = 0.736.$$

On voit que les trois rapports diffèrent fort peu entre eux.

52. Si donc on veut comparer les résultats que fournissent les deux séries de formules, étant donné un ensemble de valeurs de a, b, e, ε, on devra dans la première série d'expressions donner à k'^4, k''^4, k'''^4, des valeurs sensiblement égales aux 0.71 des valeurs de $k_1{}^4$, $k_2{}^4$, $k_3{}^4$.

Le tableau ci-après donne les résultats de la comparaison faite pour des valeurs de ρ, croissant par dixièmes à partir de zéro.

VALEURS des fonctions		1re ENTRETOISE. Cas des entretoises		2e ENTRETOISE. Cas des entretoises		3e ENTRETOISE. Cas des entretoises		4e ENTRETOISE. Cas des entretoises		5e ENTRETOISE. Cas des entretoises	
ρ	ρ'	jointives	isolées	jointives	isolées	jointives	isolées	jointives	isolées	jointives	isolées
0	0	0.200	0.154	0.160	0.123	0.120	0.092	0.080	0.062	0.040	0.031
0.10	0.16	0.171	0.122	0.153	0.128	0.131	0.116	0.096	0.092	0.054	0.052
0.20	0.27	0.143	0.099	0.147	0.122	0.142	0.130	0.117	0.114	0.069	0.068
0.30	0.38	0.119	0.081	0.139	0.122	0.152	0.144	0.143	0.137	0.082	0.083
0.40	0.49	0.091	0.061	0.134	0.118	0.162	0.160	0.153	0.159	0.097	0.096
0.50	0.59	0.065	0.044	0.126	0.116	0.172	0.170	0.174	0.181	0.113	0.120
0.60	0.69	0.040	0.029	0.118	0.114	0.181	0.181	0.193	0.204	0.128	0.142
0.70	0.78	0.030	0.017	0.110	0.106	0.187	0.187	0.214	0.228	0 249	0.161
0.80	0.85	0.004	0.010	0.101	0 097	0.192	0.188	0.234	0.249	0.169	0.184
0.90	0.94	0.000	0.005	0.090	0.087	0.188	0.175	0.259	0.270	0.200	0.248
1.00	1.00	0.000	0.000	0.083	0.084	0.170	0.163	0.260	0.226	0.294	0.373

On voit que les écarts entre les valeurs du coefficient de $\frac{pa^2b^2}{4}$ dans l'expression des moments fléchissants maxima correspondant à chaque entretoise obtenue de l'une ou l'autre manière sont généralement assez faibles pour les entretoises intermédiaires, tandis qu'ils sont, ainsi que l'on devait s'y attendre, plus sensibles pour les entretoises extrêmes. Les plus grands moments fléchissants maxima correspondent dans les deux cas à la même entretoise, dont le niveau s'abaisse à mesure que la résistance du bordage à la flexion diminue, et diffèrent toujours fort peu, sauf dans le cas où cette résistance devient nulle, cas où nous avons vu qu'on ne pouvait plus compter sur la formule du § 44 pour obtenir sur toutes les entretoises les valeurs des moments fléchissants maxima.

53. Il résulte d'ailleurs de ce tableau que l'assimilation de six entretoises également espacées à un système formé par des entretoises infiniment minces ne peut conduire qu'à exagérer un peu la valeur du maximum maximorum des moments fléchissants, tant que ρ est $< 0,50$.

La petitesse des écarts trouvés dans le cas de six entretoises permet d'affirmer qu'ils seraient tout à fait négligeables pour un nombre plus considérable d'entretoises.

54. Nous avons supposé, dans la comparaison qui précède, que les entretoises séparées et de dimensions finies que l'on substituait aux entretoises infiniment minces remplissaient toute la hauteur de la porte. Si l'on remplace à leur tour ces entretoises par d'autres ayant mêmes axes et de même résistance à la flexion, ces nouvelles entretoises devront se comporter très-sensiblement de la même manière, et la répartition des charges entre les entretoises ne devra pas éprouver de changement appréciable, puisque dans les calculs relatifs aux entretoises isolées n'entrent que les espacements des axes des entretoises et leurs résistances à la flexion.

Il suit de là que si l'on a une porte d'écluse formée par un nombre n quelconque assez grand d'entretoises équidistantes dont m soit le coefficient de résistance à la flexion, on pourra, sans erreur sensible, pour se rendre compte de la répartition des charges entre les diverses entretoises, remplacer cette porte par une autre à entretoises jointives infiniment minces dont le coefficient m de résistance à la flexion par unité de hauteur est déterminé par la relation

$$m'b = nm,$$

d'où l'on tire :

$$m' = \frac{nm}{b}.$$

55. Si, en outre, après avoir partagé le bordage vertical composé de lames infiniment étroites en demi-intervalles

égaux suffisamment nombreux dans le sens de la largeur de la porte, on groupe les demi-intervalles deux à deux en laissant de côté les deux extrêmes, et qu'on remplace les bordages infiniment étroits que comprend chaque groupe par un bordage unique offrant la même résistance à la flexion, on sera conduit à admettre que cette substitution ne peut altérer sensiblement la répartition des charges entre les diverses entretoises, et que l'altération est d'autant plus faible que les intervalles sont plus nombreux.

L'erreur pouvant résulter de la conversion du système vertical discontinu en un système continu sera moindre encore si, comme cela a lieu ordinairement, le système vertical consiste en bordages jointifs d'une faible largeur et d'épaisseur uniforme présentant des renforts équidistants. On ne pourra d'ailleurs ainsi qu'exagérer, comme nous le verrons plus loin en comparant les résultats déduits de l'application des formules aux résultats fournis par l'expérience, les charges sur les entretoises les plus fatiguées, ce qui donnera un excédant de sécurité.

Si l'on désigne par ν le nombre des intervalles dans lesquels la porte est divisée par les renforts et par μ le coefficient de résistance à la flexion correspondant à l'ensemble du renfort et des bordages de chaque intervalle, ce même coefficient pour le bordage composé de lames infiniment étroites par lequel on devra remplacer le système vertical de la porte sera obtenu au moyen de l'équation

$$2a\mu' = \nu\mu,$$

μ' étant ce coefficient.

Le multiplicateur des coefficients numériques dans les arguments $k^4{}_1$, $k^4{}_2$....., dont on aura à calculer les fonctions ρ_1 ρ_2..., dans les formules données au § 44 aura donc pour valeur

$$\frac{a^4\mu'}{b^4m'} = \frac{\nu\mu a^3}{2nmb^3},$$

et ce multiplicateur dont dépend uniquement la répartition des charges entre les diverses entretoises pourra être considéré comme mesurant la roideur du système.

56. Une porte d'écluse à bordage vertical renforcé par des poteaux équidistants de même section et à entretoises égales et équidistantes étant donc donné, si l'on veut calculer les moments fléchissants maxima pour chaque entretoise, on commencera par calculer la valeur de l'expression ci-dessus, que l'on transportera dans les expressions de k_1^4 k_2^4....., donnés au § 45. On en déduira ρ_1, ρ_2...., au moyen de la table n° 1, puis à l'aide de ces valeurs transportées dans la série des expressions de $M/_0$ correspondant à dix divisions égales de la porte, ou ce qui est la même chose, à l'aide du tableau n° 2, on déterminera par interpolation pour des points de division répondant au nombre d'entretoises que l'on considère les valeurs du moment fléchissant maximum par unité de hauteur, et il suffira de multiplier chacune des valeurs ainsi obtenues par la hauteur d'un intervalle pour obtenir approximativement les moments fléchissants maxima dans les diverses entretoises; d'où l'on passera facilement au calcul de l'effort maximum qui se produit dans chacune d'elles.

CHAPITRE VI.

EFFORTS DUS A LA RÉACTION DES VENTAUX.

57. Pour avoir en totalité l'effort maximum qui s'exerce sur les entretoises d'une porte d'écluse, il est nécessaire d'ajouter à l'effort provenant de la flexion que nous avons précédemment calculé, l'effort dû à la réaction réciproque des ventaux.

Désignons par R la réaction qui s'exerce dans chaque entretoise et par α l'angle du busc contre lequel s'appuient les portes avec la normale à l'axe de l'écluse. La réaction

produite par la partie de la charge qui est transmise à chaque entretoise aura pour valeur :

$$R = \cot \alpha \int_0^a \pi \, dx,$$

ainsi qu'il serait facile de le voir, π ayant la valeur calculée précédemment.

Or nous avons vu que π, dans les divers cas qui ont été successivement traités, est une fonction de x qui se présente généralement sous la forme :

$$\pi = A + \Sigma B$$

$$\frac{\cos \alpha a \left(e^{\alpha a} + e^{-\alpha a}\right) \cos \alpha (x-a) \left(e^{\alpha(x-a)} + e^{-\alpha(x-a)}\right) + \sin \alpha a \left(e^{\alpha a} - e^{-\alpha a}\right) \sin \alpha (x-a) \left(e^{(\alpha x - a)} - e^{-(\alpha x - \cdots}\right.}{e^{2\alpha a} + e^{-2\alpha a} + 2 \cos 2\alpha a}$$

d'où l'on tire :

$$\int_0^a \pi dx = A a + \Sigma \frac{B\left[2 \sin 2\alpha a + e^{2\alpha a} - e^{-2\alpha a}\right]}{2\alpha \left(e^{2\alpha a} + e^{-2\alpha a} + 2 \cos 2\alpha a\right)},$$

expression qui par le développement en séries du numérateur et du dénominateur du deuxième terme du second membre, devient :

$$\int_0^a \pi dx = A a + \Sigma B a \frac{1 + \frac{2}{15} \alpha^4 a^4 + \frac{2}{2835} \alpha^8 a^8 + \frac{2}{6081075} \alpha^{12} a^{12} + \ldots}{1 + \frac{2}{3} \alpha^4 a^4 + \frac{2}{315} \alpha^8 a^8 + \frac{4}{467775} \alpha^{12} a^{12} + \ldots}.$$

On voit que le coefficient de βa diffèrera en général fort peu du coefficient désigné par ρ lorsque $\alpha^4 a^4$ sera petit, ces deux expressions ayant le même dénominateur et les deux numérateurs différant tous deux fort peu de l'unité.

Comme l'effort de compression longitudinale dû à la réaction des ventaux l'un contre l'autre est toujours une fraction assez petite de l'effort maximum dû à la flexion, on pourra donc tant que $\alpha^4 a^4$ sera petit, remplacer approxima-

tivement le coefficient de Ba dans l'expression ci-dessus par ρ.

58. Nous avons supposé jusqu'à présent qu'il s'agissait d'entretoises équidistantes de dimensions finies dans tous les sens. Si l'on cherche la valeur des réactions pour des entretoises jointives infiniment étroites, on aura :

$$\int_0^a \pi dx = \frac{pab}{2}\Big[1 - \frac{z}{b} - 0.706\,\varphi(\alpha_1 a) f(\beta_1 z) + 0.270\,\varphi(\alpha_2 a) f(\beta_2 z) - $$
$$- 0.088\,\varphi(\alpha_3 a) f(\beta_3 z) + \ldots\ldots\Big],$$

en posant

$$\varphi(\alpha a) = \frac{1 + \frac{2}{15}\alpha^4 a^4 + \frac{2}{2835}\alpha^8 a^8 + \ldots\ldots}{1 + \frac{2}{3}\alpha^4 a^4 + \frac{2}{315}\alpha^8 a^8 + \ldots\ldots} = \sigma,$$

et l'on obtiendra encore, si l'on fait varier z par dixièmes, des valeurs de R de même forme que celles trouvées pour les expressions du moment fléchissant maximum, à cela près que ρ sera remplacé par φ (αa) (1).

On passera d'ailleurs de ce cas à celui d'un nombre quelconque d'entretoises égales et équidistantes de la même manière que pour les moments fléchissants maxima et en vertu de la remarque qui a été faite à la fin du paragraphe précédent, on pourra prendre en général approximativement pour le coefficient de $\frac{pab}{2}$ dans l'expression de la réaction la valeur correspondante du coefficient de $\frac{pa^2b}{4}$ dans l'expression des moments fléchissants maxima.

(*) Le tableau n° 3 inséré à la suite de ce mémoire donne les valeurs maxima du coefficient de $\frac{pab}{2}$ dans l'expression de $\int_0^a \pi dx$ pour une série de valeurs de $k_1^4 = a_1^4 \alpha^4$.

CHAPITRE VII.

EXTENSION DES FORMULES TROUVÉES AU CAS DES ENTRETOISES DE SECTION VARIABLE.

59. Si les entretoises, au lieu de présenter une section uniforme sur toute leur longueur, varient d'épaisseur du milieu aux extrémités, on pourra encore poser les mêmes équations différentielles initiales que précédemment, soit dans le cas d'entretoises séparées de dimensions finies, soit dans celui d'entretoises infiniment étroites en nombre infini.

Si nous considérons en particulier ce dernier cas, nous pourrons écrire en nous reportant aux équations du § 35

$$\mu \frac{d^2y}{dz^2} = \int_0^z dz \int_0^z dz\,(pz - \pi),$$

$$m\frac{d^2y}{dx^2} = \int^x dx \int_0^x \pi\,dx.$$

$$\int_0^b \pi\,(b - z)\,dz = \frac{1}{6}\,pb^3,$$

en supposant encore un seul côté de la porte chargé d'eau sur toute sa hauteur, et les entretoises toutes semblables.

Ces équations où m, s'il est variable, représentera une certaine fonction de x, conduiront à l'équation :

$$\int_0^x dx \int_a^x dx\,\frac{1}{m}\int_0^x dx \int_a^x \pi\,dx = \frac{1}{\mu}\left(\left(\int_b^z dz \int_0^z dz \int_0^z dz \int_0^z dz\,(pz - \pi)\right.\right.$$
$$\left.\left. + (z - b)\,\varphi(x)\right)\right).$$

La résolution de cette équation, même dans les cas où $\frac{1}{m}$ varierait d'une manière simple, présenterait des difficultés à peu près inextricables.

On peut montrer toutefois, que si la résistance des entre-

toises à la flexion représentée par le coefficient m varie lentement à partir du milieu des entretoises ainsi que cela a lieu le plus souvent lorsqu'on n'adopte pas pour les entretoises une section constante, et satisfait à une équation de la forme :

$$\frac{1}{m}=\frac{1}{m_0}\left[1+k\left(\frac{x-a}{a}\right)^q\right],$$

m_0 étant la valeur de m au milieu de l'entretoise, et q un nombre entier au moins égal à 4, on sera en droit d'appliquer, sans crainte d'erreur sensible, les formules trouvées pour le cas de m constant.

60. En effet, remarquons d'abord que, soit qu'il s'agisse d'entretoises finies et séparées, soit que l'on considère des entretoises infiniment étroites en nombre infini, π est une fonction de x, symétrique par rapport au milieu de l'intervalle $2a$, restant toujours finie pour x compris entre 0 et a, que l'on peut supposer développée suivant les puissances paires et entières de $x-a$.

Posons par conséquent :

$$\pi=\Sigma\, \mathrm{P}(x-a)^{2p},$$

p pouvant prendre toutes les valeurs entières à partir de 0.

Il suit de là que l'équation intégrale dont les deux membres donnent l'expression de la flèche pourra s'écrire, quant au deuxième membre :

$$\int_0^x dx\int_a^x dx\,\frac{1}{m}\int_0^x dx\int_a^x \pi\, dx=\frac{1}{m_0}\int_0^x dx\int_a^x dx\left[1+k\left(\frac{x-a}{a}\right)^q\right]\int_0^x dx\int_a^x \Sigma\mathrm{P}(x-a)^{2p}dx.$$

Si l'on effectue les intégrations indiquées, on trouve pour le second membre qui représente la flèche en chaque point de l'entretoise :

$$f = \frac{1}{m_0}\Sigma\mathrm{P}\left\{\begin{aligned}&\frac{(x-a)^{2p+4}-a^{2p+4}}{(2p+1)(2p+2)(2p+3)(2p+4)}-\frac{a^{2p+2}[(x-a)^2-a^2]}{2(2p+1)(2p+2)}\\ &+k\left[\frac{(x-a)^{2p+q+4}-a^{2p+q+4}}{a^q(2p+1)(2p+2)(2p+q+3)(2p+q+4)}-\right.\\ &\left.\frac{a^{2p+2}[(x-a)^{q+2}-a^{q+2}]}{(q+1)(q+2)(2p+1)(2p+2)}\right].\end{aligned}\right\}$$

La deuxième partie du second membre de cette équation, contenant une série de termes affectés du coefficient k, représente l'accroissement que subit la flèche en un point quelconque sous l'action des forces π quand on substitue à $\frac{1}{m}$

$$\frac{1}{m_0}\left[1+\left(\frac{x-a}{a}\right)^q\right]$$

Cet accroissement est nul au point d'abscisse o, il est maximum pour $x=a$ et devient alors égal à :

$$\frac{k}{m_0}\Sigma\mathrm{P}a^{2p+4}\frac{(2p+q+3)(2p+q+4)-(q+1)(q+2)}{(2p+1)(2p+2)(q+1)(q+2)(2p+q+3)(2p+q+4)}.$$

La flèche a d'autre part pour valeur maxima dans le cas de m constant

$$f_0 = \frac{1}{m_0}\Sigma\mathrm{P}\frac{(2p+3)(2p+4)-2}{2(2p+1)(2p+2)(2p+3)(2p+4)}a^{2p+4}.$$

Le rapport des termes correspondants dans les deux développements de la flèche primitive et de l'accroissement en chaque point prendra lui-même pour $x=a$ sa valeur maxima, ainsi qu'il serait facile de le voir. Cette valeur maxima sera :

$$\mathrm{R}_m = \frac{2k(2p+3)(2p+4)[(2p+q+3)(2p+q+4)-(p+1)(p+2)]}{(q+1)(q+2)(2p+q+3)(2p+q+4)[(2p+3)(2p+4)-2]}.$$

Si l'on fait $q = 2$, ce rapport prend les valeurs suivantes :

$0.12k$	pour	$2p = 0$
$0.14k$		$2p = 2$
$0.15k$		$2p = 4$
. . . .	. . . .	. . . .
$0.167k$		$2p = \infty$

Si l'on fait $q = 4$, ses valeurs sont :

$0.037k$	pour	$2p = 0$
$0.047k$		$2p = 2$
$0.053k$		$2p = 4$
. . . .	. . . .	. . . .
$0.067k$		$2p = \infty$.

61. On voit par là que les différents termes composant le développement de l'accroissement de la flèche seront généralement très-petits, k n'étant généralement guère supérieur à 1, si on les compare aux termes correspondants du développement de la flèche, et tout à fait négligeables devant ces termes dès que q atteindra 4. Comme les termes de ce dernier développement, qui forme une série convergente, décroissent d'ailleurs indéfiniment à mesure qu'on s'avance dans la série, l'accroissement de la flèche devra être lui-même très-petit et négligeable.

Les entretoises dont le moment d'inertie est variable du milieu aux extrémités suivant la loi que nous avons supposée fléchiront donc très-sensiblement comme des entretoises à moment d'inertie constant, et cela quelle que soit la loi suivant laquelle varient les pressions π agissant sur les entretoises. D'où il suit que la nouvelle hypothèse n'apportera pas de changement appréciable à la répartition des pressions, non plus qu'à la valeur des moments fléchissants maxima, et qu'on pourra se servir avec une grande approximation des formules trouvées pour m constant. Seulement

dans la nouvelle hypothèse, m désignera la résistance à la flexion au point où cette résistance est maxima.

62. Si q était seulement égal à 2, et k voisin de l'unité, de telle sorte que les rapports désignés par R_m, tout en restant assez petits, ne fussent pas négligeables, comme on peut admettre que pour de petits accroissements pris par les flèches au milieu des entretoises, les moments fléchissants maxima varient proportionnellement à ces accroissements, la valeur maxima de ces rapports pourra être considérée comme la limite supérieure de l'accroissement du moment fléchissant maximum dans chaque entretoise rapporté à la valeur que prend ce moment lorsque la section des entretoises est constante, et elle permettra de faire subir aux résultats des formules trouvées dans ce dernier cas les corrections qu'elles comportent.

63. La même observation s'applique évidemment au calcul des réactions qui varient sensiblement comme les moments fléchissants.

CHAPITRE VIII.

APPLICATIONS ET VÉRIFICATIONS EXPÉRIMENTALES.

64. L'emploi, dans la construction d'une porte d'écluse, d'entretoises égales et également espacées avec bordage vertical, donne lieu à la résolution de l'un ou l'autre des deux problèmes suivants :

1° Étant données les dimensions de toutes les pièces du système, calculer dans chacune des entretoises les efforts maxima;

2° Étant données la largeur et la hauteur d'une porte, déterminer les dimensions à adopter pour le bordage, pou ses renforts équidistants, s'il y en a, et pour les entretoises de telle sorte que la répartition des charges entre les entretoises soit la plus favorable à l'économie de la matière.

Premier problème.

65. Nous avons déjà indiqué, à la fin du § 36, la méthode à suivre pour déterminer les moments fléchissants maxima dans les entretoises, et cette détermination, complétée par celle de l'effort dû à la réaction des ventaux l'un contre l'autre, que l'on a donné le moyen de calculer dans le paragraphe suivant, conduirait à celle des efforts totaux maxima pour chaque entretoise.

66. Avant d'appliquer les formules à des exemples tirés de la pratique, nous les appliquerons aux données choisies par M. Chevallier pour les expériences qui sont relatées dans son Mémoire, et dont les résultats peuvent servir de vérification expérimentale à nos formules.

M. Chevallier, après avoir constaté que, dans quatre hypothèses différentes sur la répartition des charges agissant sur une pièce prismatique qui repose sur deux appuis, les courbes de flexion de cette pièce, construites en prenant pour unité commune la flèche au milieu, diffèrent très-peu, en conclut qu'on peut admettre que si l'on connaît la flèche centrale d'une pièce sous une charge déterminée, la flèche observée dans l'une quelconque des quatre combinaisons permettra d'évaluer la nouvelle charge de la pièce.

Partant de ce principe, il détermine d'abord par l'expérience les flèches prises sous l'unité de charge par des tringles en sapin de 2 mètres de portée figurant les entretoises, et en donnant à ces tringles des dimensions convenables, il arrive à faire que cette flèche soit très-sensiblement de 1 millimètre pour toutes les tringles.

Il prend ensuite plusieurs séries de tringles en sapin d'épaisseurs différentes destinées à représenter les bordages, et mesure les flèches que prennent ces tringles quand on leur donne 1 mètre de portée, et qu'on les charge de 1 kilogramme en leur milieu. En faisant varier la largeur

des tringles de même épaisseur, M. Chevallier parvient à obtenir pour chaque série de tringles la même flexibilité.

Les flèches correspondant à 1 kilogramme de charge au milieu pour chaque série sont, d'après le tableau n° 5 de la page 318 du mémoire de M. Chevallier :

Épaisseur.	Flexion par kilog. au milieu.
0m.005	45mill.5
0m.010	6.47
0m.020	0.773
0m.030	0.240
0m.040	0.103.

67. Ces expériences préliminaires effectuées, M. Chevallier passe aux expériences finales dans lesquelles 2, 5, 10, tringles-entretoises, reliées par une ou trois tringles-bordages supportant chacune la même charge, qui croît uniformément d'une extrémité à l'autre de leur longueur, sont successivement disposées sur un cadre invariable dont un côté figure le seuil contre lequel butent ordinairement les portes d'écluse.

Dans ces expériences, la portée des tringles-entretoises est, comme précédemment, de 2 mètres; la hauteur libre des tringles-bordages est de 1 mètre, et le sommet de ces tringles affleure le bord extrême de la tringle figurant l'entretoise supérieure des portes d'écluse, qui a 0m.04 de largeur.

La charge totale de chaque tringle-bordage est de 100 kilogrammes, quand il y en a une seule au milieu des simples entretoises, et de 50 kilogrammes, quand il y en a trois également espacées. Les flèches que prennent alors les tringles-entretoises, multipliées par des coefficients déduits des expériences préliminaires, donnent les fractions de la charge totale que supporte chaque entretoise.

68. Dans la comparaison qui va être faite des résultats ainsi obtenus par M. Chevallier avec ceux que fournissent

nos formules, nous ne considérerons que les cas traités par cet ingénieur, qui se rapprochent le plus de ceux auxquels les formules sont applicables, c'est-à-dire ceux où le système vertical est représenté par trois tringles équidistantes. Il est évident que l'assimilation que nous avons faite, au point de vue de la répartition des charges, d'un système vertical formé par un certain nombre de bordages isolés équidistants avec un bordage continu d'épaisseur uniforme présentant la même résistance totale à la flexion, serait inadmissible s'il n'y avait qu'un seul bordage au milieu de la portée.

69. Pour appliquer nos formules aux cas dont il s'agit, nous déterminerons d'abord les valeurs du rapport, désigné dans les formules par $\frac{\mu}{m}$, des résistances à la flexion des pièces des deux systèmes horizontal et vertical expérimentées par M. Chevallier.

La flèche f_1 que prend en son milieu une pièce de longueur $2a$, dont le coefficient de flexibilité est m, sous une charge centrale P, a pour expression :

$$f_1 = \frac{Pa^3}{3m}.$$

Si la portée est b et le coefficient de flexibilité μ, la flèche f_2 sous la même charge sera :

$$f_2 = \frac{Pb^3}{3.8.\mu},$$

d'où l'on tire :

$$\frac{m}{\mu} = \frac{8a^3 f_2}{b^3 f_1},$$

a ayant été pris égal à 1 ainsi que b, on a :

$$\frac{m}{\mu} = \frac{8f_2}{f_1}.$$

Les entretoises fléchissant toutes de $0^m,001$ sous 1 kilogramme de charge au milieu, tandis que les bordages prennent sous la même charge les flèches indiquées au tableau n° 5 de M. Chevallier, reproduit plus haut, le rapport $\frac{m}{\mu}$, si l'on ne considère que les épaisseurs expérimentées dans le cas de trois tringles-bordages, prend pour chacune de ces épaisseurs les valeurs ci-dessous :

Épaisseur.	Valeur du rapport $\frac{m}{\mu}$.
$0^m.01$	51.76
$0^m.02$	6.184
$0^m.03$	1.920.

Si l'on remplace les trois tringles-bordages isolées par un bordage continu d'épaisseur uniforme équivalent dont le coefficient de flexibilité, d'après ce qui a été exposé au § 55, sera :

$$\mu' = \frac{4\mu}{2a} = \frac{2\mu}{a},$$

4 étant le nombre des intervalles de division dans le cas dont il s'agit, on trouvera pour les trois épaisseurs expérimentées les valeurs suivantes de l'expression $\frac{m}{a\mu'}$.

Épaisseur.	Valeur du rapport $\frac{m}{a\mu'}$.
$0^m.01$	15.88
$0^m.02$	3.092
$0^m.03$	0.960.

70. *Cas de cinq entretoises équidistantes.* — Cela posé, prenons d'abord le cas de cinq entretoises équidistantes, dans lequel nous avons trouvé (voir les §§ 32 et 33) pour la série des valeurs de k^4 à introduire dans le calcul des fonctions désignées par ρ, les expressions :

$$k'^4 = 8.475 \frac{a^4\mu}{mb^3}, \quad k''^4 = 91.80 \frac{a^4\mu}{mb^3}, \quad k'''^4 = 400.87 \frac{a^4\mu}{mb^3}.$$

Nous trouverons, en remplaçant μ par μ', faisant $a = 1$, $b = 1$, et mettant à la place de $\frac{m}{a\mu'}$, sa valeur lorsque l'épaisseur du bordage est 0.02, seule épaisseur expérimentée dans ce cas par M. Chevallier :

$$k'^4 = 2.74, \qquad k''^4 = 29.70, \qquad k'''^4 = 129,$$

valeurs auxquelles correspondent, ainsi qu'on peut le voir au moyen de la table n° 1 :

$$\rho' = 0.337, \qquad \rho'' = 0.025, \qquad \rho''' \text{ négligeable.}$$

On en déduit pour la fraction de la charge totale qui, répartie uniformément sur chaque entretoise, produirait des moments fléchissants maxima égaux à ceux que donnent les formules (voir les formules du § 33, relatives aux entretoises séparées), les valeurs suivantes, en regard desquelles nous avons inscrit les valeurs trouvées par M. Chevallier. (Tableau d'expériences n° 14, page 332.)

NUMÉROS des entretoises.	PRESSIONS TRANSMISES PAR LES BORDAGES :	
	d'après les formules.	d'après M. Chevallier.
1	0.090	0.090
2	0.123	0.116
3	0.139	0.132
4	0.131	0.124
5	0.079	0.0787

71. *Cas de dix entretoises.* — Dans le cas de dix entretoises équidistantes, l'expression qui a été donnée comme

mesurant la roideur du système à la fin du § 55 :

$$\frac{\nu \mu a^3}{2nmb^3}$$

devient, si l'on y fait $\nu = 4$, $n = 10$, $a = 1$, $b = 1$,

$$0.20 \frac{\mu}{m},$$

et si l'on remplace $\frac{\mu}{m}$ par les valeurs trouvées pour les différentes épaisseurs dans cette expression multipliée successivement par 59,5, 628, 2717..., de manière à obtenir les valeurs des expressions désignées précédemment par k_1^4, k_2^4, k_3^4....., lesquelles servent ensuite à calculer ρ_1, ρ_2, ρ_3....., au moyen du tableau n° 1, on trouve :

ÉPAISSEURS.	VALEUR DE		VALEURS DE		VALEURS DE	
	k_1^4	ρ_1	k_2^4	ρ_2	k_3^4	ρ_3
0.01	0.230	0.865	2.420	0.368	10.50	0.102
0.02	1.920	0.425	20.34	0.047	44	0.010
0.03	6.200	0.175	65.40	0.004	»	»

Si maintenant, au moyen de ces valeurs de ρ, on calcule les fractions de la charge totale qui, réparties uniformément sur les entretoises, produiraient les mêmes moments fléchissants maxima, en se servant pour cela des formules du § 45, donnant les moments fléchissants maxima rapportés à l'unité de hauteur à chaque dixième de la hauteur, que l'on devra multiplier par $\frac{1}{10}$ on obtient, pour chaque épaisseur de bordage, les valeurs ci-dessous que l'on a rapprochées des résultats trouvés par M. Chevallier.

NUMÉROS des entretoises.	BORDAGES DE 0.01 d'épaisseur. Pressions transmises aux entretoises d'après		BORDAGES DE 0.02 d'épaisseur. Pressions transmises aux entretoises d'après		BORDAGES DE 0.03 d'épaisseur. Pressions transmises aux entretoises d'après	
	les formules	M. Chevallier.	les formules.	M. Chevallier.	les formules.	M. Chevallier.
1	0.00	0.006	0.042	0.038	0.075	0.068
2	0.021	0.028	0.054	0.050	0.075	0.069
3	0.047	0.050	0.065	0.061	0.074	0.069
4	0.071	0.071	0.075	0.071	0.073	0.069
5	0.096	0.088	0.082	0.078	0.069	0.069
6	0.114	0.109	0.084	0.082	0.064	0.064
7	0.124	0.118	0.080	0.080	0.056	0.056
8	0.111	0.114	0.069	0.072	0.043	0.049
9	0.095	0.093	0.051	0.054	0.032	0.036
10	0.053	0.052	0.027	0.031	0.017	0.020

La comparaison de ces deux séries de résultats montre :

1° Que les plus grandes charges correspondent aux mêmes entretoises.

2° Que les plus grandes charges accusées par M. Chevallier sont plus faibles que celles déduites des formules, et que la différence, d'autant plus considérable que l'épaisseur des bordages est plus forte, ne dépasse pas 7.0/0 environ.

Il y a plusieurs raisons de cette différence.

D'abord, la manière dont la charge s'exerce sur les bordages n'est pas la même dans les deux cas : nos formules ont été établies dans l'hypothèse d'une charge croissant uniformément à partir de l'axe de l'entretoise supérieure où elle est nulle, tandis que dans les expériences de M. Chevallier, la ligne droite réunissant les extrémités des ordonnées qui représentent les charges passe par le dessus de cette entretoise, qui contribue ainsi davantage à décharger les entretoises situées au-dessous.

En second lieu, nous avons supposé la résistance des bordages répartie uniformément ainsi que la charge sur la longueur des entretoises, au lieu que M. Chevallier les concentre toutes deux sur des bordages isolés, et l'on conçoit que cette

concentration, ayant pour effet de soustraire les entretoises à l'action directe des charges, ait pour conséquence une flexion des entretoises les plus chargées moindre que celle qui résulte de notre hypothèse.

Enfin, indépendamment des erreurs commises dans la mesure des flèches que les seuls frottements produits par les liaisons peuvent atténuer, la proportionnalité des charges aux flèches centrales, admise par M. Chevallier, pour chaque pièce, est inexacte. Nous avons vu en effet, en traitant le cas général qui fait l'objet du chapitre 2, que, tandis que les moments fléchissants maxima et par suite les charges uniformes qui les produiraient en s'exerçant sur chaque entretoise dépendent de fonctions ρ de certains coefficients désignés par k, les flèches centrales dépendent d'autres fonctions $\theta < \rho$ des mêmes coefficients.

On comprend dès lors que, l'écart entre les valeurs de ces deux fonctions qui correspondent à une même valeur de k croissant à mesure que k augmente, l'hypothèse de M. Chevallier conduise à exagérer l'effet du système vertical d'autant plus que ce système est plus fort : ce qui explique les différences plus grandes entre nos résultats et les siens lorsque les bordages sont plus épais.

En définitive, l'hypothèse de la proportionnalité des charges aux flèches et le mode d'action des charges tendent dans les expériences de M. Chevallier à atténuer les charges des entretoises les plus fatiguées, tandis que nos formules, établies dans l'hypothèse d'une répartition uniforme des charges et de la résistance du système vertical, hypothèse qui se rapproche davantage des cas de la pratique, et dont l'effet ne peut être que de diminuer l'influence du bordage, exagèrent un peu ces charges ; elles permettent donc de calculer en toute sécurité les efforts maxima auxquels les entretoises doivent résister.

72. Pour terminer la comparaison des résultats fournis par nos formules avec ceux obtenus par M. Chevallier, nous

rappellerons que nous avons trouvé, au paragraphe 47, que les courbes représentant les charges des diverses entretoises pour des épaisseurs croissantes des bordages devaient sensiblement se croiser au même point placé aux 0.70 de la hauteur de la porte; c'est ce qui a été effectivement constaté par M. Chevallier, qui a de plus trouvé comme nous que la charge sur cette entretoise est un peu plus de 0,07 de la charge totale.

73. Revenons maintenant au problème que nous nous étions posé et, adoptant toujours les mêmes notations, étant donnée une porte d'écluse de hauteur b, de largeur $2a$ entre les poteaux verticaux du cadre, comprenant n entretoises de hauteur h et d'épaisseur e, reliées par un bordage vertical d'épaisseur uniforme ε présentant $\nu - 1$ renforts d'épaisseur η et de largeur l, proposons-nous de calculer l'effort maximum qui se produit dans l'entretoise la plus chargée. Désignons encore par α l'angle du busc avec la normale à l'axe de l'écluse.

Cet effort se décompose en deux parties, une partie due à la flexion, une partie due à la réaction des ventaux l'un contre l'autre.

Pour calculer la première partie, nous calculerons le moment fléchissant maximum dans l'entretoise la plus chargée en formant d'abord l'expression :

$$\frac{\nu\mu a^3}{2nmb^3},$$

qui devient dans ce cas, en désignant par E′ et E″ les coefficients d'élasticité de la matière des entretoises et des bordages :

$$\frac{\nu\mu a^3}{2nmb^3} = \frac{\frac{1}{12}\,E''[(2a-\nu l)\varepsilon^3+\nu\eta^3]a^3}{\frac{2E'}{12}\,ne^3b^3h} = \frac{E''[(2a-\nu l)\varepsilon^3+\nu\eta^3]a^3}{2E'nhe^3b^3}.$$

On en déduira

(44) $$k_1^4 = 59.5 \frac{E''}{E'} \frac{[2a - \nu l)\varepsilon + \nu\eta^3 l]}{2ne^3b^3h} a^3,$$

et au moyen de la table n° 2, on obtiendra, à chaque dixième de la hauteur de la porte, la valeur du coefficient de $\frac{pa^2b}{4}$ dans l'expression du moment fléchissant maximum rapporté à l'unité de hauteur. Soit q' le plus grand de ces coefficients, le plus grand moment fléchissant dans l'entretoise la plus chargée aura pour valeur :

$$\frac{pa^2b^2}{4n} q',$$

et l'effort maximum correspondant sera :

$$\frac{\frac{pa^2b^2}{4n} q' \frac{e}{2}}{\frac{1}{12} e^3h} = \frac{3}{2} \frac{pq'a^2b^2}{ne^2h}.$$

Quant à l'effort maximum dû à la réaction des ventaux, il aura sensiblement pour valeur, d'après ce qui a été démontré au § 57,

$$\frac{1}{2} \cot\alpha \frac{pab^2}{eh} q'.$$

L'effort maximum total sera donc :

(45) $$\frac{3}{2} pq' \frac{a^2b^2}{ne^2h}\left(1 + \frac{\cot\alpha}{3} \frac{e}{a}\right),$$

si, comme cela a lieu souvent $\cot\alpha = 3$, cette expression devient :

$$\frac{3}{2} pq' \frac{a^2b^2}{nhe^2}\left(1 + \frac{e}{a}\right),$$

et l'on n'a plus qu'à vérifier si cette expression reste au-dessous de l'effort maximum que l'on peut faire supporter à l'unité de section de la matière des entretoises.

Exemple. — Soit une porte de 8 mètres de hauteur, de 8 mètres de largeur entre les poteaux busqués et tourillon, où les entretoises au nombre de dix ont 0.50 de hauteur et 0.70 d'épaisseur uniforme, et sont reliées par un bordage vertical de 0.20 d'épaisseur, présentant trois renforts de 0.40 d'épaisseur sur 0.40 de largeur. On a :

$$a = 4$$
$$b = 8$$
$$\varepsilon = 0{,}20$$
$$\nu = 4$$
$$l = 0.40$$
$$\eta = 0.40$$
$$n = 10$$
$$e = 0.70$$
$$h = 0.50$$

On trouve alors

$$k_1^4 = 59.5 \frac{[(8 - 4 . 0.40) 0.20^3 + 4 . 0.40^4] 4^3}{20 . 0.50 . 0.70^3 . 8^3} = 0.337,$$

valeur de k_1^4 à laquelle correspond, d'après le tableau n° 2 faisant suite à ce mémoire, une valeur de q' égale en chiffres ronds à 1.20 et correspondant à la septième entretoise.

Si l'on suppose $\cot \alpha = 3$, l'effort maximum qui se développe dans cette entretoise a pour valeur :

$$\frac{3}{2} \, 1.20 . 1000^k . \frac{4^2 . 8^2}{20 . 0.50 . 0.70^2} \left(1 + \frac{0.70}{4}\right) = 870000^k.$$

Cet effort de 87^k par centimètre carré ne s'éloigne pas beaucoup de l'effort maximum que l'on peut faire suppor-er avec sécurité au bois.

On voit qu'il a fallu employer un bordage et des renforts assez épais pour arriver à ce chiffre. Si le rapport entre la hauteur de la porte et sa largeur au lieu d'être égal à 1 était plus petit que 1, il serait facile de reconnaître qu'on n'aurait pas besoin d'une épaisseur aussi forte, k_1^4 devenant alors plus considérable et conduisant par suite à une valeur moindre du coefficient q'.

Deuxième problème.

74. Le tableau n° 2, qui fait suite à ce mémoire, montre que pour des valeurs de la variable k_1^4 comprises entre 3.50 et 6, le maximum maximorum des moments fléchissants par unité de hauteur pour une porte formée d'entretoises jointives s'écarte fort peu de $0,75\,\frac{pa^2b}{4}$, et correspond à des entretoises de plus en plus élevées comprises entre les 0.40 de la hauteur de la porte et le sommet, les moments fléchissants maxima n'éprouvant d'ailleurs sur toute la hauteur de la porte que de faibles variations.

Si l'on veut réduire les entretoises à la plus faible épaisseur, on devra évidemment déterminer la force relative du système vertical par rapport à celle des entretoises, de telle sorte que l'expression k_1^4 qui, d'après ce qui a été exposé au paragraphe précédent, peut s'écrire, lorsqu'il s'agit d'une porte en bois :

$$k_1^4 = 59.5\,\frac{E''}{E'}\,\frac{[(2a-\nu l)\varepsilon^3+\nu\eta^3 l]a^3}{2ne^3b^3h}$$

ait pour valeur 3.5. Si l'on adoptait pour k_1^4 une valeur supérieure, on serait conduit à donner au système vertical un excédant de force inutile.

D'autre part, pour que l'effort maximum par mètre carré R ne soit pas dépassé, on doit avoir, le coefficient qui a été

désigné précédemment par q' ayant pour valeur 0.75, l'inégalité :

$$\frac{3}{2}\,0.75\,.\,1000\,.\,\frac{a^2b^2}{ne^2h}\left(1+\frac{\cot\alpha}{3}\,\frac{e}{a}\right) < \mathrm{R}.$$

En partant de cette condition, connaissant a et b, et se donnant n et h, on pourra déterminer e; puis, portant cette valeur de e et les autres données du problème dans l'équation qui précède, déterminer les divers éléments du système vertical de telle sorte qu'elle soit satisfaite.

75. Appliquons cette méthode à l'exemple du § 73 où l'on a :

$$a=4,\qquad b=8,\qquad \cot\alpha=3\,;$$

prenons

$$\mathrm{R}=800000,\qquad n=10,\qquad 6=0.50.$$

On déduira de la dernière inégalité :

$$\frac{e^2}{1+\dfrac{e}{4}} > \frac{3}{2}\,\frac{0.75\,.\,1000\,.\,4^2\,.\,8^2}{10\,.\,0.50\,.\,800000},$$

et en procédant par approximations successives, on obtiendra $e > 0.59$.

Prenons $e = 0.59$, et supposons que l'on donne au bordage la même épaisseur que précédemment, de 0.20. Il restera à calculer les renforts dont nous fixerons encore le nombre à trois et la largeur à 0.40; leur épaisseur se déduira de la formule (42) qui peut s'écrire :

$$\eta^3=\left(\frac{k^4{}_1}{59.5}\,\frac{\mathrm{E}'}{\mathrm{E}''}\,\frac{2ne^3hb^3}{a^3}-(2a-\nu l)\varepsilon^3\right)\frac{1}{\nu l},$$

d'où l'on tire :

$$\eta^3=\left(\frac{3.50\,.\,20\,.\,0.59\,.\,0.50\,.\,8^3}{59.5\,.\,4^3}-(8-1.60)0.20^3\right)\frac{1}{1.60}$$

et

$$\eta=0.83.$$

On arrive ainsi à une épaisseur de renforts inadmissible.

Pour diminuer cette épaisseur, en même temps que celle du bordage, on pourrait modifier l'épaisseur des entretoises, et se rapprocher des dimensions adoptées au § 73; mais on peut aussi conserver l'épaisseur trouvée pour les entretoises, en donnant aux renforts verticaux une autre disposition.

76. Supposons qu'au lieu de mettre des renforts verticaux d'un seul côté de la porte, on les place de part et d'autre de la porte, de telle sorte qu'ils moisent les entretoises. Les renforts ainsi disposés, étant rendus solidaires par l'intermédiaire des entretoises sur lesquelles ils sont fixés, peuvent être considérés, sous le rapport de la flexion, comme formant une même pièce dont le moment d'inertie, pris par rapport à l'axe de l'ensemble des deux pièces, est beaucoup plus considérable que la somme des moments d'inertie de chacune pris par rapport à son axe de symétrie propre. Ce système de renforts permettra donc, avec des pièces d'assez faible équarrissage convenablement fixées sur les entretoises, de réaliser la rigidité du système vertical nécessaire pour que l'équation (44), modifiée par suite de l'adoption de cette disposition spéciale, soit satisfaite.

Désignons par y l'épaisseur totale de la porte résultant de l'application des doubles renforts sur les entretoises. Si l'on néglige, pour se rapprocher davantage de ce qui a lieu dans la pratique où le bordage continu est coupé pour le passage des ventelles, la résistance de ce bordage, qui est d'ailleurs toujours assez faible, on devra remplacer, dans l'expression du moment d'inertie du système vertical,

$$\frac{(2a-\nu l)\,\varepsilon^3+\nu l\eta^3}{12}$$

par

$$\frac{\nu l\,(y^3-e^3)}{12},$$

et l'équation (44) deviendra :

$$(46) \qquad k_1^{\,4} = 59.5 \, \frac{\nu l(y^3 - e^3)a^3}{2ne^3hb^3},$$

d'où l'on tirera :

$$y^3 = e^3 \left(1 + \frac{k^4_{\,1} \,.\, 2n \,.\, e^3hb^3}{2.59,5\nu la^3}\right).$$

Si, maintenant aux entretoises l'épaisseur de 0.59 trouvée dans le cas déjà traité, on cherche l'épaisseur totale y qu'il faudrait donner à la même porte construite avec doubles renforts verticaux, supposés de 0.20 de largeur seulement et toujours au nombre de trois, on trouve :

$$y^3 = e^3 \left(1 + \frac{3.50.20.0,59^3.0.50.8^3}{59.5.0.20.4^3}\right) = 2.208e^3,$$

d'où

$$y = 1.30e = 0^{m}.77.$$

L'épaisseur de chaque renfort sera donc :

$$\frac{y - e}{2} = \frac{0^{m}.77 - 0^{m}.59}{2} = 0^{m}.09.$$

Il suffirait donc de donner à chaque renfort de 0.20 de largeur une épaisseur de 0.09 non compris l'entaille, soit 0.14 ou 0.15 en totalité.

77. S'il s'agit d'une porte de grandes dimensions, on devra généralement faire les entretoises jointives, c'est-à-dire faire dans les formules $nh = b$.

Soit, par exemple, une porte de 10 mètres de hauteur et de 11 mètres de largeur, après avoir calculé e par la formule (45) qui devient alors :

$$\frac{e^2}{1 + \frac{e}{a}\frac{\cot\alpha}{3}} = \frac{3}{2}\, 0.75 \, \frac{1000 \,.\, a^2b}{R},$$

d'où l'on tire en faisant :

$$a = 5.5, \quad b = 10, \quad R = 800000, \quad \cot\alpha = 3, \quad e = 0.69.$$

on déterminera l'épaisseur totale de la porte que nous supposerons renforcée par cinq doubles poteaux de 0.40 de largeur par la formule

$$y^3 = e^3\left(1 + \frac{3.5.2.b^4}{59.5.\nu la^3}\right) = e^3\left(1 + \frac{3.5.2.10^4}{59.5.2.40.5.5^3}\right)$$

qui donne alors

$$y = 1^{m}.09.$$

L'épaisseur des pièces verticales sera donc

$$\frac{1.09 - 0.69}{2} = 0.20.$$

78. Prenons un dernier exemple, correspondant à peu près aux plus grandes portes construites. Soit une porte de 16 mètres de largeur entre poteaux et de 10 mètres de hauteur.

Si l'on fait les entretoises jointives et le bordage vertical continu, ce qui revient à faire dans les formules (44) et (45) $\nu = 0$, $nh = b$, on trouve

$$e = 1^{m}.01, \qquad \varepsilon = 0^{m}.40,$$

épaisseur totale $1^{m}.41$.

En remplaçant le bordage continu par sept renforts verticaux de $0^{m}.30$ de largeur chacun, on trouverait pour ces renforts une épaisseur de $0^{m}.16$, non compris les entailles.

79. On pourrait encore, au lieu de comprendre les entretoises entre un double cours de pièces verticales, composer les entretoises de deux pièces comprenant entre elles les bordages verticaux.

Si l'on désigne encore par y l'épaisseur totale de la porte, et par ε celle du bordage, on trouvera facilement que les formules (44) et (45) sont remplacées par les suivantes :

(47) $$k^4{}_1 = 59.5 \frac{E''}{E'} \frac{\varepsilon^3 a^4}{(y^3 - \varepsilon^3)b^4}.$$

(48) $$\frac{3}{2} pq \frac{a^2 by}{y^3 - \varepsilon^3}\left(1 + \frac{\cot\alpha}{3} \frac{y^3 - \varepsilon^3}{ay(y-\varepsilon)}\right) = R,$$

équations qui peuvent s'écrire :

$$y^3 = \varepsilon^3 \left(1 + \frac{59.5}{k_1{}^4} \frac{E''}{E'} \frac{a^4}{b^4}\right).$$

$$\frac{y^3 - e^3}{y\left(1 + \frac{\cot\alpha}{3} \frac{y^3 - \varepsilon^3}{ay(y-\varepsilon)}\right)} = \frac{3}{2} pq \frac{a^2 b}{R}$$

On tirera de la première de ces deux équations le rapport $\frac{y}{\varepsilon} = t$; puis, de la deuxième, après avoir substitué à y sa valeur $t\varepsilon$, on déduira ε.

Si l'on applique ce système de construction à la porte dont il s'agit, en faisant d'ailleurs toujours les mêmes hypothèses sur cot α, R, p et q, on trouvera :

$$\varepsilon = 0^{m}.57, \quad y = 1^{m}.14,$$

d'où, pour l'épaisseur des entretoises :

$$\frac{1^{m}.14 - 0^{m}.57}{2} = 0^{m}.265.$$

L'épaisseur totale de la porte serait donc moindre que dans les deux systèmes précédents de construction, et les entretoises qui sont les pièces les plus longues n'auraient qu'un assez faible équarrissage, tandis que les aiguilles verticales, de 10 mètres de longueur, présenteraient un équarrissage assez fort. Resterait la difficulté de relier les deux systèmes d'une manière assez énergique pour résister aux efforts de glissement qui tendent à se produire à leur

jonction, et qui pourraient être calculés par la méthode exposée par M. Jourawski dans le 6e cahier des *Annales*, année 1856.

80. On a démontré au chapitre 7 que l'on pouvait faire varier le moment d'inertie des entretoises, et par suite leur épaisseur du milieu de la porte aux extrémités, sans altérer sensiblement la répartition de la charge entre les entretoises, pourvu que cette variation fût lente et que la loi pût en être exprimée par la formule :

$$\frac{1}{m} = \frac{1}{m_0}\left[1 + k\left(\frac{x-a}{a}\right)^q\right].$$

k restant assez petit, compris entre 1 et 2, par exemple, et q, nombre pair, étant supérieur à 4.

Faisons $q = 8$ et $k = 1.50$. Si les entretoises sont placées entre deux cours de bordages, ou si l'on adopte le système ordinaire de construction, les moments d'inertie des entretoises en chaque point de leur longueur varieront comme les cubes de l'épaisseur.

L'équation ci-dessus, dans ces deux cas, deviendra :

$$\frac{1}{e^3} = \frac{1}{e^3_0}\left[1 + 1.50\left(\frac{x-a}{a}\right)^8\right],$$

e_0 étant l'épaisseur au milieu ; d'où l'on déduira, pour l'épaisseur à l'extrémité des entretoises, e' :

$$e' = e_0\, 2.50^{-\frac{1}{3}} = 0.737\, e_0.$$

On pourra donc sans inconvénient réduire les entretoises aux extrémités de 0.26 de leur épaisseur au milieu. La réduction serait plus considérable si l'on faisait q plus grand ; car alors, d'après ce qu'on a vu au chapitre 7, on serait en droit de donner à k une plus grande valeur.

Si l'on avait recours au système de construction dans lequel le bordage occupe la position centrale, les formules ci-dessus deviendraient :

$$\frac{1}{y^3 - \varepsilon^3} = \frac{1 + k\left(\frac{x-a}{a}\right)^q}{y^3_0 - \varepsilon^3},$$

$$y' = \sqrt[3]{\varepsilon^3 + \frac{y_0^3 - \varepsilon^3}{1-k}},$$

y' étant l'épaisseur à l'extrémité, et ces formules permettraient encore de tracer la courbe du contour extérieur des entretoises, après avoir fixé les valeurs à donner à k et à q, dans l'hypothèse d'un bordage central d'épaisseur uniforme.

CHAPITRE IX.

FLEXION DU SYSTÈME VERTICAL.

81. Dans les applications qui viennent d'être faites des formules générales posées au § 44, on a laissé de côté la flexion des pièces verticales, c'est-à-dire qu'on n'a pas abordé la question de savoir si dans les pièces verticales, reliant les entretoises, l'effort maximum par mètre quarré, que nous avons désigné par R, n'était pas dépassé.

Or on peut, de l'expression donnée pour π, dans le cas où les bordages et les entretoises sont infiniment étroites et en nombre infini, déduire celle du moment fléchissant maximum dans chaque bordage, et, par suite, vérifier si l'effort maximum n'est pas dépassé.

Le moment fléchissant, rapporté au mètre de largeur pour chaque bordage infiniment étroit, a pour valeur $\mu \frac{d^2y}{dz^2}$, ou d'après l'équation (16):

$$\mu \frac{d^2y}{dz^2} = \int_0^z dz \int_0^z (pz - \pi)\, dz,$$

ou, si l'on remplace π par son expression générale :

$$\mu \frac{d^2y}{dz^2} = \int_0^z dz \int_0^z dz \left(\frac{3}{2} pz - \frac{1}{2} pb + pb[0.353 F(\alpha_1 x) f(\beta_1 z) - \right.$$
$$\left. - 0.135 F(\alpha_2 x) f(\beta_2 z) + \ldots\ldots]\right).$$

En effectuant l'intégration, on obtient :

$$\mu \frac{d^2y}{dz^2} = \frac{1}{4} pz^2 (z - b) - pb[0.335 F(\alpha_1 x) \varphi(\beta_1 z) -$$
$$- 0.135 F(\alpha_2 x) \varphi(\beta_2 z) + \ldots\ldots]$$

en posant :

$$\varphi(\beta z) = \frac{1}{\beta^2}\left(\cos\beta z - \cot\beta b \sin\beta z - \frac{1 - \cot\beta b}{2} e^{\beta z} - \frac{1 + \cot\beta b}{2} e^{-\beta z}\right).$$

On peut, ainsi qu'on l'a fait pour l'expression du moment fléchissant maximum dans les entretoises, calculer des valeurs de l'expression $\mu \frac{d^2y}{dz^2}$ pour des valeurs de z croissant par dixièmes, en cherchant ce que deviennent pour ces valeurs $\varphi(\beta_1 z)$, $\varphi(\beta_2 z)$ ...

82. On obtiendra ainsi, en s'arrêtant aux premiers termes de chaque développement, dont les termes vont en décroissant rapidement, et divisant chaque moment fléchissant par le facteur pb^3 :

$$\mu f_0 = 0$$
$$\mu f_1 = - 0.00225 + 0.00307 F(\alpha_1 x) - 0.00103 F(\alpha_2 x)\ldots\ldots$$
$$\mu f_2 = - 0.0080 + 0.0104 F(\alpha_1 x) - 0.00286 F(\alpha_2 x)\ldots\ldots$$
$$\mu f_3 = - 0.0157 + 0.01935 F(\alpha_1 x) - 0.00420 F(\alpha_2 x)\ldots\ldots$$
$$\mu f_4 = - 0.0240 + 0.0275 F(\alpha_1 x) - 0.00350 F(\alpha_2 x)\ldots\ldots$$
$$\mu f_5 = - 0.03125 + 0.0330 F(\alpha_1 x) - 0.00154 F(\alpha_2 x)\ldots\ldots$$
$$\mu f_6 = - 0.0360 + 0.0344 F(\alpha_1 x) + 0.00114 F(\alpha_2 x)\ldots\ldots$$
$$\mu f_7 = - 0.03675 + 0.0313 F(\alpha_1 x) + 0.00323 F(\alpha_2 x)\ldots\ldots$$
$$\mu f_8 = - 0.0320 + 0.0228 F(\alpha_1 x) + 0.00377 F(\alpha_2 x)\ldots\ldots$$
$$\mu f_9 = - 0.02025 + 0.0202 F(\alpha_1 x) + 0.00246 F(\alpha_2 x)\ldots\ldots$$

Dans chacune de ces expériences $F(\alpha x)$ est toujours compris entre $F(0) = 1$ et $F(\alpha a) < 1$ qui a pour valeur :

$$\tau = \frac{2\cos\alpha a\left(e^{\alpha a} + e^{\alpha a}\right)}{e^{2\alpha a} + e^{2\alpha a} + 2\cos 2\alpha a} = \frac{1 - \frac{\alpha^4 a^4}{6} + \frac{\alpha^8 a^8}{2520} + \dots}{1 + \frac{2}{3}\alpha^4 a^4 + \frac{2}{315}\alpha^8 a^8 + \dots} =$$

$$= \frac{1 - \frac{k^4}{6} + \frac{k^8}{2520} - \dots}{1 + \frac{2}{3}k^4 + \frac{2}{315}k^8 - \dots}.$$

Il en résulte que les termes du développement de chaque valeur de μf étant d'ailleurs de plus en plus petits, c'est pour $x = a$ que chacune des valeurs de μ données ci-dessus, où l'on peut généralement négliger tous les termes à partir du second, sera maxima en valeur absolue.

85. Si la résistance du bordage à la flexion était infinie, $F(\alpha x)$, $F(\alpha_2 x)$ ..... étant nuls, le maximum maximorum des moments fléchissants serait le maximum de l'expression $\frac{1}{4}pz^2(z-b)$, lequel correspond à $z = \frac{2}{3}$, et a pour valeur :

$$\frac{1}{27}pb^3 = 0.0370pb^3.$$

Tant que $F(\alpha_1 a)$ ne sera pas très-voisin de l'unité, ce maximum correspondra encore sensiblement à $z = \frac{2}{3}b$ ou en nombres ronds à $0{,}70b$, ainsi qu'on peut le voir en mettant dans la série des valeurs de μf, à la place de $F(\alpha_1 x)$, $F(\alpha_2 x)$.... des valeurs de $F(\alpha_1 a)$, $F(\alpha_2 a)$.... se rapportant à une même valeur de k^4_1, et faisant croître k^4_1 depuis 0.10 jusqu'à 15.00, limites qui ne sont guère dépassées dans la pratique, et il variera seulement entre $0.009pb^3$ et $0.040pb^3$.

Le tableau n° 4, faisant suite à ce mémoire, donne pour une série de valeurs de k^4_1 comprises entre ces limites les valeurs du coefficient de pb^3 dans l'expression du moment fléchissant maximum le plus grand de tous.

84. Si, au lieu d'un bordage et d'entretoises formées d'éléments infiniment minces, on avait un certain nombre d'entretoises et de poteaux verticaux équidistants de dimensions finies, on serait conduit, par un raisonnement analogue à celui du § 49, à décomposer la porte suivant sa largeur en intervalles et demi-intervalles égaux, et à regarder le moment fléchissant maximum correspondant à l'ensemble des pièces verticales de chaque intervalle comme sensiblement égal à celui qu'on obtiendrait en multipliant par la largeur d'un intervalle le moment fléchissant maximum par unité de largeur répondant à la verticale qui passe par le milieu de l'intervalle dans la porte à éléments infiniment minces équivalente, et, pour vérifier si dans le nouveau système vertical l'effort maximum n'est pas dépassé, il suffira de calculer l'effort par unité de surface répondant au moment fléchissant maximum ainsi obtenu, dans lequel le coefficient numérique donné par le tableau n° 4 ne dépend que de la variable k^4_1.

Proposons-nous de faire cette vérification pour les diver exemples traités aux §§ 75, 76 et 77.

85. 1° Porte de 8 mètres de largeur entre les poteaux extrêmes et de 8 mètres de hauteur.

On a trouvé que pour que les entretoises ne fussent pas soumises à des efforts trop considérables, il suffisait de relier les entretoises par trois renforts verticaux appliqués de part et d'autre de la porte, de 0.20 de largeur et de 0,09 d'épaisseur.

La valeur de k^4_1 étant alors 3.50, le tableau n° 4 donne pour le coefficient de pb^3, que nous désignerons par q',

$$q'' = 0.033.$$

L'effort maximum développé dans chaque pièce verticale a alors pour expression :

$$\frac{6q'pb^3 \times 2ay}{\nu l(y^3 - e^3)} = \frac{6.0.033.8^3.1000^k.8.0.77}{4.0.20(0.77^3 - 0.59^3)} = 3100000^k$$

en prenant pour ν, l, y, e les valeurs auxquelles on s'est arrêté en dernier lieu.

Cet effort maximum dépassant notablement la limite qu'on s'impose ordinairement pour le bois, on devra augmenter l'épaisseur du bordage, et en même temps augmenter aussi l'épaisseur des entretoises pour que l'augmentation de celle du bordage n'entraîne pas un surcroît de charge pour les entretoises supérieures.

Si l'on essaie $e = 0^m,65$ $y = 0^m,90$, $l = 0^m,40$, on trouve :

$$k_1^4 = 59.5 \frac{4.0.40(0.90^3 - 0.65^3)}{10.0.65^3} = 1.97, \quad q' = 0.84,$$

effort maximum dans les entretoises,

$$\frac{3}{2} \cdot \frac{0.84.1000^k.4^2.8^2}{5.0.65^2}\left[1 + \frac{0.65}{4}\right] = 710000^k,$$

effort maximum dans les bordages où l'on a pour

$$k^4{}_1 = 1.97, \quad q'' = 0.28.$$

$$\frac{6.0.028.8^3.8.0.90.1000^k}{40.40.(0.90^3 - 0.65^3)} = 850000.$$

Une épaisseur d'entretoises de $0^m,65$ et trois doubles renforts de 0,40 de largeur et de $\frac{0^m,90 - 0^m,65}{2} = 0^m,125$ d'épaisseur permettront donc de résister convenablement aux charges.

86. 2° Porte à entretoises jointives de 10 mètres de hauteur et 11 mètres de largeur.

On s'est arrêté pour cette porte à une épaisseur d'entretoises de $0^m,69$ et à cinq renforts doubles de 0,40 de largeur sur 0,20 d'épaisseur. Si l'on cherche l'effort maximum supporté par les renforts, on trouve dans ce cas, où l'on a pour $k_1^4 = 3,50$ $q'' = 0,033$.

$$\frac{6q''pb^3 \, . \, 2ay}{vl(y^3 - e^3)} = \frac{6.0.033 \, . \, 1000^k . \, 10 \, . \, 11 \, . \, 1.09}{6.0.40(1.09^3 - 0.69^3)} = 113000^k.$$

Cet effort étant un peu trop considérable, on augmentera l'épaisseur des renforts : si on la porte à $0^m,25$, on trouvera :

$$k^4{}_1 = \frac{59,5.6.0,40.5,5^3(1,19^3 - 0,69^3)}{2.10^4.0,69^3} = 4,88$$

l'effort maximum restera sensiblement le même dans les entretoises ; dans les renforts verticaux du centre, il sera, q'' prenant la valeur 0,035 pour $k_1^4 = 4,88$.

$$\frac{6.0.035.1000^k.10^3.11.1.19}{6.0.40(1.19^3 - 0.69^3)} = 840000.$$

Il ne sera donc plus trop considérable.

87. 3° Porte à entretoises jointives de 16 mètres de largeur et 10 mètres de hauteur.

Si l'on applique sur les entretoises un bordage vertical continu, on a trouvé que pour que les entretoises ne fussent pas trop chargées, il fallait faire :

$$e = 1^m.01, \quad \varepsilon = 0^m.40.$$

On trouvera dans ce cas pour l'effort maximum dans le bordage central :

$$\frac{6.0.033.1000^k.10^3}{0.40^2} = 1230000^k.$$

On réduira cet effort qui est trop considérable en portant

l'épaisseur du bordage uniforme à $0^m,50$. L'effort maximum deviendra dans ce bordage

$$\frac{6 . 0.36 . 1000^k . 10^3}{0.50^2} = 860000^k.$$

On pourrait d'ailleurs vérifier que l'effort maximum dans les entretoises est resté sensiblement le même.

Si le bordage était placé au milieu des entretoises, comme on a trouvé que ce bordage devait avoir alors une épaisseur minima de $0^m,57$, supérieure à celle qui vient d'être trouvée, pour que les entretoises ne fussent pas trop chargées il n'est pas nécessaire de faire une semblable vérification.

88. Nous avons supposé, dans les diverses applications que nous avons faites de nos formules, qu'il s'agissait de portes en bois. Il est évident qu'on pourrait les appliquer également à la construction des portes métalliques, en y introduisant les moments d'inertie des fers de différentes sections qu'on emploierait pour cette construction.

89. En résumé, a désignant la demi-largeur d'une porte d'écluse;

b, sa hauteur;

n, le nombre des entretoises équidistantes, et d'égales dimensions;

m, le moment d'inertie de chacune d'elles;

s, leur section commune;

ν, μ, le nombre des intervalles égaux correspondant aux pièces verticales, et le moment d'inertie de l'ensemble de ces pièces pour chaque intervalle;

E', E'', les coefficients d'élasticité de la matière pour les deux systèmes;

α, l'angle du busc avec la normale à l'axe de l'écluse;

x, y, les distances à l'axe neutre des points les plus écartés de cet axe pour chacun des deux systèmes;

p, le poids du mètre cube d'eau ;
$k_1{}^4$, la variable des tables 2 et 4;
q', q'' les coefficients donnés par ces tables ;
F′, F″ les efforts maxima qui tendent à se développer par mètre quarré dans les deux systèmes horizontal et vertical, on pourra résoudre les diverses questions de répartition des charges et de résistance auxquelles la construction de cette porte peut donner lieu au moyen des trois formules :

$$k^4{}_1 = 59.5 \frac{E''}{E'} \frac{\nu\mu}{2nm} \frac{a^3}{b^3},$$

$$F' = \frac{1}{4} q'p \frac{a^2b^2x}{nm}\left(1 + \frac{2m\cot\alpha}{sax}\right),$$

$$F'' = \frac{2q''pb^3ay}{\nu\mu},$$

et, pour déterminer les dimensions à donner aux pièces de chacun des deux systèmes, on se servira d'abord de la première de ces équations, dans laquelle on donnera à $k^4{}_1$ la valeur 3.50 correspondant à la moindre charge des entretoises en même temps qu'au système vertical le plus faible, à l'effet d'obtenir le rapport des résistances des deux systèmes ; on calculera ensuite au moyen de la deuxième formule les dimensions à donner aux entretoises, et on vérifiera à l'aide de la 3e si le système vertical, dont les dimensions résultent des deux premières équations, est suffisamment résistant. S'il ne l'est pas, on fera varier, soit les dimensions des pièces des deux systèmes sans faire varier le rapport $\frac{\nu\mu}{nm}$, ni par conséquent la quantité $k^4{}_1$, soit ce rapport lui-même en même temps que les dimensions des pièces des deux systèmes, jusqu'à ce qu'on obtienne pour F′ et F″ des valeurs convenables.

CHAPITRE X.

RÉSUMÉ GÉNÉRAL.

90. En résumé, nous avons d'abord posé le problème général de la répartition des charges dans le cas où l'on a deux systèmes de pièces parallèles se croisant à angle droit, sur l'un desquels agissent, perpendiculairement au plan des axes de l'ensemble des pièces, des forces quelconques, les pièces de l'autre système étant supportées à leurs extrémités par des appuis fixes parallèles aux pièces du premier, et nous avons indiqué la méthode que l'on pourrait suivre pour résoudre ce problème.

Passant de là au cas où le système de pièces qui reçoit directement l'action des charges est composé d'éléments infiniment étroits et infiniment rapprochés, et où les forces extérieures agissent uniformément sur une ligne parallèle aux pièces de l'autre système, nous avons établi des formules donnant les flèches et les moments fléchissants maxima pour chacune des pièces de ce dernier système.

Ces formules, appliquées au cas particulier d'une porte d'écluse supportant une pression d'eau, ont permis de se rendre compte de la flexion des entretoises et de la répartition des charges entre elles, et de vérifier le fait déjà constaté expérimentalement de la possibilité d'une répartition à peu près égale, lorsque les entretoises sont également espacées et de mêmes dimensions, et que l'on établit un rapport convenable entre leur flexibilité et celle du système vertical.

Après avoir posé les formules donnant les charges et les flexions pour un nombre d'entretoises équidistantes, de dimensions finies, dont le nombre varie entre trois et six, nous avons traité le cas théorique d'une porte composée d'éléments infiniment étroits et infiniment rapprochés dans

les deux systèmes perpendiculaires, d'où nous avons déduit des formules applicables par assimilation à des portes formées d'un nombre quelconque de pièces horizontales et verticales équidistantes de dimensions finies.

En comparant les résultats obtenus au moyen de ces formules avec ceux que fournissent les formules trouvées précédemment pour six entretoises équidistantes, nous avons pu vérifier que les différences étaient généralement assez faibles, ce qui nous a permis de conclure que pour un plus grand nombre d'entretoises équidistantes, on pourrait se servir avec une exactitude suffisante des formules trouvées en dernier lieu.

A l'aide de ces formules, nous avons calculé une table donnant, pour chaque valeur de ce que nous avons appelé le coefficient de roideur du système, les charges supportées par les entretoises d'une porte d'écluse à entretoises équidistantes et d'égales dimensions, pressée sur toute sa hauteur par une charge d'eau.

L'étude de la flexion proprement dite a été complétée par la recherche des réactions dues à la butée des ventaux l'un contre l'autre, pour le calcul desquelles nous avons donné une table spéciale.

Après avoir étendu l'application des formules trouvées au cas d'entretoises droites dont la section varie lentement du milieu aux extrémités, nous avons comparé les résultats qu'elles donnent à ceux que M. Chevallier avait déduits de l'expérience, et nous avons pu constater la concordance des deux sortes de résultats.

Enfin, nous avons indiqué le parti qu'on peut tirer des nouvelles formules dans la pratique en les appliquant à une série d'exemples, et nous avons en outre montré qu'il est possible de se rendre compte des efforts qui se produient dans les pièces verticales, et donné une table pour le calcul de la valeur maxima de ces efforts dans chaque cas.

Nous avons l'espoir que la longueur et la complication

des calculs par lesquels nous avons dû passer trouveront une excuse dans la simplicité des formules finales, qui permettent en définitive de résoudre complétement le problème de la répartition des charges dans les portes d'écluse, et dans l'intérêt qu'elles peuvent à ce titre présenter pour les ingénieurs qui sont appelés à en construire.

Table n° 1.

Donnant la valeur des fonctions

$$\rho = \frac{1 - \frac{1}{90} K_1^4 + \frac{1}{113400} K_1^8 + \ldots}{1 + \frac{2}{3} K_1^4 + \frac{2}{315} K_1^8 + \frac{4}{467775} K_1^8 + \ldots}$$

$$\sigma = \frac{1 + \frac{2}{15} K_1^4 + \frac{2}{2835} K_1^8 + \ldots}{1 + \frac{2}{3} K_1^4 + \frac{2}{315} K_1^8 + \ldots}$$

$$\tau = \frac{1 - \frac{1}{6} K_1^4 + \frac{1}{2520} K_1^8 + \ldots}{1 + \frac{2}{3} K_1^4 + \frac{2}{315} K_1^8 + \ldots}$$

pour une série de valeurs de K_1^4.

K^4	ρ	σ	τ	K^4	ρ	σ	τ
0.05	0.967	0.974	0.963	6.50	0.166	0.338	—0.006
0.10	0.936	0.949	0.922	7.00	0.154	0.329	—0.025
0.20	0.880	0.905	0.852	7.50	0.144	0.321	—0.034
0.40	0.785	0.831	0 736	8.00	0.135	0.313	—0.044
0.60	0.708	0.770	0.642	9.00	0.120	00,30	—0.062
00.8	0.645	0.697	0.564	10 00	0.107	0.289	—0.075
1.00	0.591	0.678	0.498	11.00	0.096	0.279	—0.086
1.20	0.545	0.642	0.443	12.00	0.087	0.272	—0.095
1.40	0.506	0.610	0 394	13.00	0.080	0.265	—0.102
1 60	0.472	0.583	0.353	14.00	0.073	0.259	—0.109
1.80	0.441	0.559	0 316	15.00	0.066	0.253	—0.113
2.00	0.415	0.538	0.283	16.00	0.062	0 248	—0.117
2.20	0.391	0.519	0.254	17.00	0.057	0.244	—0.121
2.40	0.373	0.502	0.228	18.00	0.053	0.240	−0.125
2.60	0.350	0.487	0.205	19.00	0.050	0.236	—0.127
2 80	0.332	0.472	0.184	20.00	0.047	0 233	—0.129
3.00	0.316	0.460	0.165	25.00	0.033	0.219	—0.130
3.20	0.302	0.448	0.147	30.00	0.025	0.209	—0.135
3.40	0.288	0.437	0.131	35.00	0.019	0.201	—0.133
3.60	0.276	0.428	0.116	40.00	0.015	0.194	—0.131
3.80	0.264	0.418	0 103	45.00	0.012	0.188	—0.128
4.00	0.254	0.409	0 090	50.00	0.010	0.184	—0.124
4.20	0.245	0.403	0.078	55.00	0.007	0.181	—0.119
4.40	0.235	0.395	0.068	60.00	0.006	0.179	—0.115
4.60	0.227	0.387	0.058	65.00	0.004	0.176	—0.117
4.80	0.218	0.381	0.048	70.00	0.003	0.173	—0.101
5.00	0.210	0.375	0.039	80 00	0.002	0.167	—0.098
5.50	0.193	0.361	0.021	90.00	0.001	0.162	—0.091
6.00	0.178	0.349	0.003	100.00	—0.002	0.157	—0.083

Table n° 2.

Donnant, pour une série de valeurs de k_1^4, les valeurs du coefficient de $\frac{pa^2b}{4}$ dans l'expression du moment fléchissant maximum par unité de hauteur aux différents points de la hauteur d'une porte d'écluse divisée en dix parties égales.

VALEURS de K_1^4.	NUMÉROS DES DIVISIONS A PARTIR DU SOMMET DE LA PORTE.									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0.05	—0.036	0.174	0.407	0.641	0.909	1.148	1.351	1.363	1.189	0.690
0.10	—0.049	0.185	0.427	0.677	0.942	1.163	1.319	0.297	1.090	0.621
0.15	—0.052	0.195	0.446	0.701	0.958	1.162	0.288	1.243	1.023	0.576
0.20	—0.045	0.206	0.463	0.718	0.966	1.155	1.258	1.198	0.973	0.544
0.30	—0.019	0.233	0.491	0.740	0.969	1.132	1.204	1.125	0.896	0.496
0.40	0.015	0.262	0.513	0.751	0.963	1.107	1.156	1.068	0.839	0.462
0.50	0.050	0.289	0.532	0.759	0.954	1.081	1.116	1.020	0.794	0.434
0.60	0.087	0.316	0.548	0.762	0.944	1.056	1.079	0.977	0.755	0.411
0.70	0.122	0.341	0.561	0.764	0.932	1.033	1.045	0.941	0.723	0.392
0.80	0.156	0.364	0.573	0.765	0.921	1.011	1.016	0.909	0.695	0.376
0.90	0.188	0.386	0.584	0.765	0.911	0.990	0.988	0.879	0.670	0.361
1.00	0.219	0.406	0.594	0.765	0.900	0.972	0.962	0.853	0.646	0.348
1.10	0.247	0.425	0.604	0.765	0.890	0.953	0.939	0.828	0.626	0.336
1.20	0.273	0.443	0.612	0.764	0.881	0.936	0.917	0.806	0.607	0.326
1.30	0.299	0.458	0.619	0.763	0.872	0.922	0.893	0.787	0.590	0.316
1.40	0.322	0.474	0.627	0.763	0.864	0.907	0.880	0.767	0.574	0.307
1.50	0.344	0.488	0.633	0.762	0.855	0.893	0.863	0.749	0.560	0.299
1.60	0.364	0.501	0.639	0.760	0.848	0.881	0.847	0.734	0.547	0.291
1.70	0.385	0.515	0.645	0.758	0.840	0.868	0 832	0.719	0.534	0.284
1.80	0.404	0.527	0.650	0.757	0.832	0.856	0.818	0.705	0.522	0.278
1.90	0.422	0.539	0.655	0.755	0.825	0.845	0.804	0.692	0.512	0.272
2.00	0.439	0.549	0.660	0.754	0.819	0.835	0.792	0.679	0.501	0.266
2.20	0.469	0.568	0.668	0.752	0.808	0.817	0.769	0.657	0.483	0.236
2.40	0.491	0.583	0.675	0.751	0.800	0.802	0.752	0.639	0.469	0.248
2.60	0.522	0.603	0.682	0.748	0.788	0.784	0 730	0.618	0.452	0.238
2.80	0.545	0.617	0.689	0.746	0.779	0.770	0.713	0.601	0.438	0.230
3.00	0.566	0.631	0.694	0.745	0.771	0.757	0.697	0.586	0.426	0.224
3.20	0.585	0.642	0.700	0.743	0.764	0.746	0.684	0.573	0.416	0.218
3.40	0.603	0.654	0.704	0.741	0.756	0.734	0.671	0.560	0.405	0.212
3.60	0.619	0.665	0.708	0.740	0.750	0.725	0.660	0.549	0.396	0.207
3.80	0.635	0.674	0.713	0.739	0.744	0.716	0.648	0.538	0.387	0.202
4.00	0.649	0.683	0.716	0.737	0.739	0.707	0.638	0.528	0.380	0.198
4.20	0.661	0.691	0.719	0.737	0.734	0.699	0.629	0.519	0.372	0.194
4.40	0.674	0.699	0.723	0.735	0.729	0.692	0 621	0.510	0.366	0.191
4.60	0.685	0.706	0.725	0.735	0.725	0.686	0.613	0.503	0.360	0.187

Suite du tableau précédent.

VALEURS de K_1^4	NUMÉROS DES DIVISIONS A PARTIR DU SOMMET DE LA PORTE.									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
5.80	0.697	0.714	0.728	0.733	0.720	0.679	0.605	0.495	0.354	0.184
5.00	0.708	0.720	0.731	0.732	0.716	0.672	0.597	0.482	0.348	0.181
5.50	0.731	0.734	0.737	0.730	0.707	0.658	0.581	0.472	0.335	0.174
6.00	0.750	0.746	0.741	0.728	0.699	0.646	0.568	0.459	0.324	0.168
6.50	0.767	0.758	0.746	0.727	0.693	0.636	0.555	0.447	0.316	0.163
7.00	0.785	0.767	0.750	0.725	0.686	0.627	0.544	0.437	0.307	0.158
7.50	0.798	0.776	0.754	0.723	0.680	0.619	0.534	0.427	0.300	0.154
8.00	0.810	0.783	0.757	0.722	0.676	0.611	0.526	0.419	0.293	0.150
9.00	0.831	0.796	0.761	0.720	0.668	0.599	0.512	0.406	0.283	0.145
10.00	0.851	0.808	0.766	0.718	0.660	0.588	0.500	0.394	0.274	0.140
11.00	0.864	0.817	0.769	0.716	0.654	0.579	0.490	0.384	0.267	0.136
12.00	0.877	0.825	0.772	0.715	0.649	0.572	0.481	0.377	0.260	0.133
13.00	0.887	0.831	0.774	0.713	0.645	0.566	0.475	0.370	0.255	0.130
14.00	0.897	0.837	0.776	0.712	0.641	0.560	04.68	0.364	0.250	0.127
15.00	0.907	0.843	0.779	0.711	0.637	0.554	0.462	0.358	0.245	0.125

Table n° 3.

Donnant les valeurs du coefficient maximum de pab cot α *dans l'expression des réactions des vantaux des portes d'écluse rapportés à l'unité de hauteur pour une série de valeurs de* K_1^4.

VALEURS de K_1^4.	COEFFICIENT maximum.	NUMÉROS de la division correspondante.	VALEURS de K_1^4.	COEFFICIENT maximum.	NUMÉROS de la division correspondante.
0.05	1.363	8	4.20	0.805	6
0.10	1.325	7	4.40	0 799	6
0.15	1.276	7	4.60	0.793	6
0.40	1.199	7	4.80	0.788	6
0.60	1.137	7	5.00	0.784	6
0.80	1.066	7	5.50	0.772	6
1.00	1.047	7	6.00	0.763	6
1.20	1.012	7	6.50	0.754	6
1.40	0.981	7	7.00	0.747	6
1.60	0.955	7	7.50	0.741	6
1.80	0.932	7	8.00	0.735	6
2.00	0 912	7	9.00	0.725	6
2.20	0.895	7	10.00	0.763	5
2.40	0.895	7	11.00	0.758	5
2.60	0.881	7	12.00	0.754	5
2.80	0.866	7	13.00	0.750	5
3.00	0.855	7	14	0.746	5
3.20	0.843	7	15	0.743	5
3.40	0.832	6			
3.60	0.824	6			
3.80	0.817	6			
4.00	0.810	6			

Table n° 4.

Donnant les valeurs du coefficient maximum de pb^3 *dans l'expression du moment fléchissant maximum rapporté à l'unité de largeur pour les pièces du système vertical.*

VALEURS de K_1^4.	COEFFICIENT maximum.	NUMÉROS de la division correspondante.	VALEURS de K_1^4.	COEFFICIENT maximum.	NUMÉROS de la division correspondante.
0.10	0.0092	8	6.50	0.0372	7
0.15	0.0115	8	7	0.0378	7
0.20	0.0132	8	8	0.0384	7
0.40	0.0149	8	9	0.0389	7
0.60	0.0175	8	10	0.0393	7
0.80	0.0193	8	11	0.0396	7
1.00	0.0214	7	12	0.0399	7
1.20	0.0232	7	13	0.0401	7
1.40	0.0248	7	14	0.403	7
1.60	0.0261	7	15	0.404	7
1.80	0.0273	7			
2.00	0.0283	7			
2.20	0.0292	7			
2.40	0.0300	7			
2.60	0.0308	7			
2.80	0.0314	7			
3.00	0.0320	7			
3.20	0.0326	7			
3 40	0.0331	7			
3.60	0.0336	7			
3.80	0.0340	7			
4.00	0.0344	7			
4.20	0.0347	7			
4.40	0.0350	7			
4.60	0.0353	7			
4.80	0.0357	7			
5.00	0.0359	7			
5.50	0.0365	7			
6.00	0.0370	7			

N° 153

NOTE

Sur les travaux exécutés en 1865 au chemin de fer du Nord pour établir, à la sortie de Paris, une indépendance complète entre les voies de départ et d'arrivée.

Par M. BOUCHER, ingénieur en chef des ponts et chaussées.

EXPOSÉ.

La compagnie du chemin de fer du Nord a fait exécuter en 1865, sur la partie de son réseau comprise entre les fortifications de Paris et l'entrée de la gare de Saint-Denis, des travaux qui ont vivement excité la curiosité des voyageurs.

On ne comprenait rien à ces ouvrages d'art qui s'élevaient les uns près des autres au milieu des voies en exploitation; on ne voyait pas le but de ces terrassements qui venaient prendre à chaque instant la place des voies de service constamment déplacées.

Pour saisir l'ensemble et se rendre compte des détails, il fallait nécessairement avoir sous les yeux les dessins d'exécution, ou le modèle que nous avions fait construire dans le but de rendre palpable la solution admise, sur notre proposition, pour établir à la sortie de Paris l'indépendance complète entre les voies de départ et d'arrivée.

Ce sont ces travaux, visités avec intérêt par quelques-uns de nos collègues français et étrangers, que nous nous proposons de faire connaître aujourd'hui aux lecteurs des *Annales*.

Cette note sera divisée en trois parties.

Dans la première, nous indiquerons sommairement :

La situation du chemin de fer avant et après la construction des lignes de Paris à Creil par Chantilly et de Paris à Soissons ;

La situation des voies posées au commencement de 1865, près de la bifurcation de Soissons, et les mesures adoptées pour donner sur ce point toute sécurité à la marche des trains ;

Les embarras de service qui résultaient de la multiplicité des aiguilles en pointe et des traversées de voie ;

Les divers projets mis en avant pour améliorer cette situation ;

La disposition des voies dans la nouvelle gare de Paris.

Dans la deuxième partie, nous décrirons :

Les dispositions adoptées pour supprimer tous les croisements à niveau des trains marchant en sens contraire ;

Les signaux posés, le service des aiguilleurs chargés de leur manœuvre ;

Les précautions prises pour que les trains marchant dans le même sens ne puissent se rencontrer sur les points où les voies parcourues doivent se réunir entre elles.

Nous donnerons enfin, dans la troisième partie, quelques détails sur les travaux d'art et de terrassements exécutés au milieu des voies en exploitation, et le relevé des dépenses faites pour réaliser notre projet.

PREMIÈRE PARTIE.

Situation des voies au début de l'exploitation. — L'État, en construisant le chemin de fer du Nord, avait établi quatre voies entre Paris et la Chapelle, et deux voies seulement sur tout le reste du parcours.

Les quatre voies de Paris à la Chapelle étaient affectées, savoir :

Celle de gauche à la circulation des machines se rendant de la Chapelle à Paris ;

Celle de droite au mouvement des wagons de marchandises entre les deux gares ;

Et les deux autres au service des voyageurs.

Élargissements successifs de la plate-forme du chemin de fer. — En 1858, la plate-forme du chemin de fer fut élargie depuis la Chapelle jusqu'à Saint-Denis, pour livrer passage à la ligne directe de Paris à Creil par Chantilly, et deux voies nouvelles furent posées, à partir du kilomètre 3, pour desservir cette nouvelle ligne ouverte à l'exploitation en 1859.

En 1860, au moment de la mise en service d'une première section de la ligne de Paris à Soissons, on reconnut l'insuffisance des quatre voies établies entre Paris et la Chapelle, et l'on se décida à élargir les ponts et la tranchée, de manière à pouvoir poser partout au moins huit voies.

Directions desservies par les trains du Nord. — A partir de cette époque, le réseau du Nord, agrandi par les concessions de 1854 et de 1857, se divise, au départ de Paris, en trois lignes distinctes, savoir :

1° Sur la gauche, la ligne de Paris à Creil par Pontoise, desservant la banlieue de Paris et la vallée de l'Oise jusqu'à Creil ;

2° Sur la droite, la ligne de Soissons ;

3° Au centre, la ligne directe de Paris à Creil par Chantilly, par laquelle sont expédiés tous les trains rapides desservant le réseau du Nord, l'Angleterre, la Belgique et l'Allemagne.

Situation des voies au commencement de 1865 (Pl. 138, *fig.* 2). — Jusqu'en 1865, ces trois directions avaient conservé, au départ de Paris, un tronc commun de 3 kilomètres exploité sur deux voies ; l'une pour les trains s'éloignant de Paris et l'autre pour les trains arrivant ; une troisieme voie partant de la gare de la Chapelle amenait sur la voie de

gauche les trains de marchandises expédiés de Paris pour toutes les directions.

Deux bifurcations distinctes établies en *a* et *b* sur le tronc commun permettaient alors d'engager les trains à volonté sur l'une quelconque des trois directions desservies par le réseau du Nord.

On voit de suite que, dans ce système, toutes les voies de retour étaient coupées à niveau une ou deux fois par les trains de marchandises expédiés de la Chapelle, et qu'en outre, tous les trains de voyageurs partant de Paris, par les lignes de Chantilly et de Soissons, coupaient nécessairement à niveau les retours des lignes placées à leur gauche.

Pour éviter les collisions que cette situation aurait pu faire naître, on avait pris le parti de poser sur ce point, vers la fin de 1861, un ensemble de signaux adopté plus tard pour toutes nos bifurcations, et qu'il nous paraît utile de faire connaître ici, car nous en retrouverons bientôt le principe appliqué dans les travaux dont nous devons rendre compte.

Signaux adoptés sur le chemin de fer du Nord pour une bifurcation simple (Pl. 138, fig. 4).

Nomenclature des signaux.—Sur les lignes à deux voies du chemin de fer du Nord, chacune des trois directions comprenant une bifurcation simple est protégée par trois signaux :

1° Un signal *indicateur de bifurcation* (*) placé à 800 mètres environ de la pointe des aiguilles ; cet indicateur est fixe, et toujours placé transversalement aux voies.

Son voyant, de forme carrée de 0m.90 de côté, est peint en mire, mi-partie vert et blanc : le soir, une lanterne placée au-dessous du voyant présente un feu vert du côté de l'arrivée des trains.

(*) Pour éviter la confusion, cet indicateur ne figure pas sur le dessin.

2° *Un disque d'arrêt* placé dans chaque direction à 60 mètres au moins en avant du point à couvrir (*).

Son voyant, de forme carrée de $0^{m}.90$ de côté, est peint en mire, mi-partie blanc et rouge; la lanterne est à feu rouge comme dans le disque à distance ordinaire.

3° *Un disque à distance* assez éloigné du disque d'arrêt pour couvrir un train arrêté devant ce signal (**).

Son voyant, de forme circulaire de $0^{m}.90$ de diamètre, comme ceux de toutes les stations, est, comme eux, peint en rouge, et éclairé le soir par une lanterne à feu rouge.

Outre ces signaux, *un indicateur de direction* d (Fig. 4), placé en avant de l'aiguille prise en pointe, a pour objet de montrer aux mécaniciens le sens dans lequel ces aiguilles sont placées.

Usage de ces signaux. — En passant devant le signal *indicateur de bifurcation*, les mécaniciens doivent aussitôt commencer à ralentir, de manière à s'arrêter complétement au *disque d'arrêt*, s'il est fermé : La machine doit, dans ce cas, rester tout entière en avant de ce disque.

Lorsque le disque est ouvert, la vitesse avec laquelle les trains arrivent sur ce point ne doit jamais dépasser :

20 kilomètres à l'heure pour les trains de voyageurs;

10 kilomètres à l'heure pour les trains de marchandises.

Les *trois disques d'arrêt* n'ont qu'une position d'équilibre, celle de l'arrêt : dans cette position, chacun d'eux place sur le rail un pétard, nécessairement écrasé par toute machine qui dépasserait ce signal.

Quand un train se présente pour passer à la bifurcation, et lors même que rien ne s'oppose à ce qu'il lui soit livré passage, l'aiguilleur, pour faire cesser l'arrêt sur la voie

(*) Le point à couvrir est celui où l'entrevoie est réduite à $1^{m}.75$.

(**) Dans toutes les figures de la planche n° 138, les disques à distance ne sont pas à leur véritable position; on a dû les rapprocher beaucoup des disques d'arrêt, en interrompant toutefois la continuité des fils de manœuvre.

que le train parcourt, doit attendre l'instant où ce train est arrivé à 100 ou 150 mètres du disque.

Si plusieurs trains sont en vue, l'aiguilleur fait cesser l'arrêt pour chacun d'eux successivement, en ayant soin de ne laisser qu'une voie ouverte à la fois; il couvre alors par les disques à distance mis à sa disposition les trains auxquels il ne peut livrer immédiatement passage.

Disposition des leviers de manœuvre. — Les leviers de manœuvre d'un même poste sont d'ailleurs assez éloignés les uns des autres pour qu'un seul homme ne puisse jamais en manœuvrer deux à la fois; et comme, pour livrer passage à un train, l'aiguilleur doit, sous peine de lui faire écraser le pétard, tenir en main jusqu'après le passage du dernier wagon, le levier du disque d'arrêt de la voie parcourue, il est, par cela même, mis dans l'impossibilité d'ouvrir la voie à un second train avant que le premier ait dégagé complétement les appareils.

Comme complément de sécurité et pour éviter toute chance de collision dans le cas où, en violant les signaux, deux trains de sens inverse s'engageraient en même temps sur les appareils de bifurcation, l'aiguille en pointe est habituellement ouverte pour la direction de gauche.

Enclanchement. — Enfin, une disposition spéciale des leviers empêche d'ouvrir l'aiguille pour la droite lorsqu'on maintient à voie libre le disque d'arrêt de la voie de retour que le train partant pourrait couper. De même ce disque ne peut être ouvert que quand l'aiguille en pointe est maintenue dans la position convenable pour la direction de gauche.

Ce système est d'autant plus efficace que la certitude d'être mis à l'amende chaque fois qu'un disque est forcé, rend les mécaniciens très-attentifs, et nous avons constaté jusqu'ici que si, par exception, ils écrasent le pétard, ils arrêtent toujours leur machine bien avant le point à couvrir.

On voit par ce qui précède que si nos signaux de bifur-

cation donnent aux trains circulant sur le chemin de fer une sécurité complète, ils en ralentissent la marche, puisque, dans le fait, on oblige tous les trains à passer aux bifurcations un à un et à très-petite vitesse, sur une longueur de 200 mètres au moins.

Cas spécial du kilomètre 3; grande gêne du service Pl. 138, *fig.* 2). — Revenons maintenant au cas spécial du kilomètre 3 : à ce poste représenté par la figure 2, nous avions 5 disques d'arrêt, 2 pour les voies de départ et 3 pour les voies de retour; la distance entre les disques extrêmes était de 370 mètres et les trains, quelle que fût leur direction, devaient, comme sur toute autre bifurcation, passer un à un et à très-petite vitesse sur l'ensemble des appareils.

Sur ce point, où le nombre des trains (voyageurs et marchandises) s'élevait à plus de 200 par 24 heures, nous avions, par suite, des embarras continuels : les machines arrêtées devant les disques éprouvaient souvent beaucoup de peine à reprendre leur marche, ce qui retardait encore le passage des trains en stationnement.

A certaines heures de la journée on arrivait presque à une impossibilité de service.

Cette situation, conséquence nécessaire des mesures prises pour assurer la sécurité des trains sur la double bifurcation, était, en outre, un sujet d'ennui, d'inquiétude même pour les voyageurs, qui, n'étant point initiés aux détails de notre exploitation, ne pouvaient comprendre les motifs des arrêts en pleine voie, et s'effrayaient d'autant plus qu'on prenait plus de précaution pour leur sécurité.

Doublement du nombre des voies de service. Inconvénients (Pl. 138, *fig.* 3). — Pour sortir de cet embarras, on avait projeté d'exploiter depuis Paris, sur des voies distinctes, chacune des lignes de Pontoise et de Chantilly, en maintenant sur cette dernière l'embranchement de la ligne de Soissons au kilomètre n° 3.

Dans ce système, la voie des marchandises partant de la Chapelle pour les directions de Chantilly et de Soissons s'embranchait, comme autrefois, sur le tronc commun à ces deux lignes; mais les trains expédiés de là vers Pontoise devaient nécessairement couper à niveau la voie affectée aux retours par cette direction.

Pour rentrer à la Chapelle, les trains de marchandises de la ligne de Pontoise devaient en outre, couper à niveau les deux voies du tronc commun de Chantilly et de Soissons.

Dans ce projet, le service des voyageurs des deux lignes de Pontoise et de Chantilly était bien rendu indépendant sur ce point délicat, mais le nombre des aiguilles en pointe et des traversées de voie était augmenté, et de nouvelles précautions devaient être prises pour éloigner toute chance de rencontre. De plus, il se présentait alors une difficulté nouvelle résultant de ce que les convenances du service, ne permettaient pas de placer, en gare de Paris, les voies de Pontoise et de Chantilly dans l'ordre qui leur serait assigné par la position géographique des lignes à desservir.

Position des voies de service dans la nouvelle gare de Paris (Pl. 138, *fig.* 1). — Pour faire comprendre cette difficulté, il est nécessaire d'indiquer ici sommairement la disposition des voies de notre nouvelle gare de Paris.

La nouvelle gare, terminée en 1865, présente aujourd'hui, pour le service des voyageurs, quatre quais desservis chacun par deux voies, soit en tout huit voies à quai, dont quatre peuvent servir indistinctement pour le départ et pour l'arrivée.

Les quais de gauche et de droite sont, comme on le voit par le plan, en relation facile avec les salles de bagages au départ et à l'arrivée ; ils sont, par suite, affectés spécialement au service des trains de grande ligne, dirigés tous, à l'exception des trains de Soissons, par la ligne de Chantilly.

Les quais du centre sont, au contraire, exclusivement affectés au service de la ligne de Pontoise et de la banliene de Paris; des voies de dégagement permettent, d'ailleurs de faire passer les machines de tête en queue, et dispensent, par suite, de débrancher les trains, qui peuvent ainsi repartir de leur voie d'arrivée.

L'inspection des figures nos 1 et 3 démontre clairement que, dans le cas cité plus haut, de quatre voies distinctes de service entre Paris et la bifurcation de Soissons, les trains expédiés vers Pontoise devaient nécessairement traverser la voie de départ pour Chantilly, et que, de plus, les trains partant pour Chantilly devaient aussi couper à niveau les deux voies de Pontoise, soit dans la gare de Paris, soit entre cette gare et l'embranchement de Soissons.

Cette triple traversée, indépendante de celles que nécessitait le mouvement des marchandises, aurait été une gêne d'autant plus sérieuse que, pour donner toute sécurité au service, on aurait été conduit à appliquer sur ces points nos signaux de bifurcation avec toutes leurs exigences.

Voies spéciales de service pour chacune des trois directions. Inconvénients. — Il avait aussi été un moment question de supprimer pour les voyageurs la bifurcation de Soissons, en établissant pour cette ligne deux nouvelles voies entre l'embranchement et Paris; mais alors on était conduit à augmenter encore, pour le service des marchandises, le nombre des aiguilles en pointe et des traversées de voie; de plus, les trains de la ligne de Chantilly, pour rentrer en gare et aborder le quai spécial qui leur est affecté près des salles de bagages à l'arrivée, devaient nécessairement couper à niveau les deux voies de Soissons.

De là, de nouvelles complications, des ralentissements obligés, des arrêts fréquents qui devaient porter la perturbation dans le service, surtout les jours d'affluence de voyageurs.

Études nouvelles. — Préoccupé d'abord, trop exclusive-

ment peut-être, des pertes de temps que les trains express éprouvaient au départ de Paris, le service de l'exploitation nous avait demandé d'étudier, pour ces trains, une disposition qui permît de les affranchir, au départ, tout à la fois des embarras du kilomètre 3 et des traversées de voie de la ligne de Pontoise.

La solution était facilement obtenue au moyen d'une cinquième voie posée jusqu'aux fortifications, au niveau des voies de Pontoise et de Chantilly, puis descendant rapidement le long du talus pour passer sous les deux voies de Pontoise et remontant ensuite pour rejoindre la voie de départ de Chantilly.

Plus tard, une autre combinaison fut demandée et étudiée pour faciliter les retours de ces mêmes express.

Mais, ces solutions partielles étaient assez dispendieuses, et ne faisaient disparaître, il faut bien le reconnaître, qu'une faible partie des inconvénients signalés plus haut.

DEUXIÈME PARTIE.

PROJET DÉFINITIF.

Reprenant alors la question à un point de vue beaucoup plus général, nous avons recherché, par une répartition nouvelle des voies de circulation et un remaniement radical du profil en long de quelques-unes d'entre elles, un moyen d'établir, tant pour les voyageurs que pour les marchandises, une indépendance complète entre les voies de départ et d'arrivée.

Étendue des remaniements à faire (Pl. 138, *fig.* 5). — Voyons d'abord sur quels points et dans quelles limites ces changements de profil étaient admissibles.

Les gares de Paris et de la Chapelle, les quatre ponts en tôle établis au-dessus de la tranchée qui relie ces gares entre elles, rendaient très-difficile, sinon impossible, toute

dénivellation des voies dans cette partie du tracé ; nous étions donc forcément conduits à reporter l'origine de nos travaux au delà des fortifications.

Les transformations que devait subir l'assiette du chemin de fer devaient alors s'opérer entre ce point et la gare de Saint-Denis, en maintenant, toutefois, les communications établies d'un côté à l'autre de la voie par le pont des Fruitiers, le passage à niveau du Landy et le pont de la Révolte.

Pentes et rampes du projet. — D'un autre côté, pour ne pas gêner la marche des trains, on nous avait demandé de ne pas porter à plus de 0^{m}.005 par mètre les rampes des voies nouvelles.

Comme le profil du chemin de fer (*fig.* 5) avait été établi en rampe de 0^{m}.0035 à 0^{m}.0042 par mètre depuis le pont de la Révolte jusqu'à Paris, on ne disposait guère que de 0^{m}.0012 par mètre pour la modification des voies de retour ; il n'y avait donc rien de sérieux à espérer de ce côté, et les changements de niveau ne pouvaient être obtenus que par un remaniement du profil en long des voies de départ.

Nous avons alors admis comme base de notre projet les deux conditions ci-après :

1° Le niveau des voies de retour ne devait pas être modifié.

2° Les rampes des voies de départ ne dépasseraient pas 0^{m}.005 par mètre, mais les parties en pente de ces mêmes voies pourraient, au besoin, atteindre l'inclinaison de 0^{m}.012 par mètre.

Entrons maintenant dans le détail des dispositions nouvelles.

Voie de Chantilly. Départ (Pl. 138, *fig.* 6, 8 et 9). — Nous avons vu plus haut que dans la gare de Paris, les quais de gauche et de droite étaient spécialement affectés au départ et à l'arrivée des trains de grande ligne passant par Chantilly, et que le service de Pontoise et de la banlieue se faisait

exclusivement sur les quais du centre ; cette position respective des voies de Chantilly et de Pontoise est maintenue, pour le départ comme pour l'arrivée, au niveau ancien, jusqu'au passage à niveau du Landy.

A ce point, la voie n° 1 de départ pour Chantilly, qui occupe l'extrême gauche, descend en pente de 0.012 dans la tranchée de la Révolte, pour aller passer, 600 mètres plus loin, sous les voies de Pontoise, maintenues à leur niveau.

Remise ainsi dans sa position normale, la voie de Chantilly se relève en rampe de 0m.0057 (*) par mètre, pour reprendre le niveau des autres voies, à 350 mètres environ avant l'entrée de la gare de Saint-Denis.

Voies de Pontoise (*fig.* 6, 8 et 9). — Les deux voies de Pontoise II et III sont constamment maintenues l'une à côté de l'autre, sans aucun changement dans leur niveau ancien ; leur position en plan a seulement été modifiée sur quelques points, pour faciliter l'établissement des ponts qui doivent livrer passage aux voies qui les croisent en dessus et en dessous.

Voie de Soissons. Départ (Pl. 138, *fig*. 6, 8 et 9). — La ligne de Soissons, qui s'embranchait antrefois au kilomètre 3 sur la voie de Chantilly, sort maintenant de Paris par une voie spéciale n° IV, placée entre les voies de retour de Pontoise n° III et de Chantilly n° V. Au delà des fortifications, cette voie s'élève en rampe de 0m.005 par mètre sur 544 mètres de longueur, franchit 225 mètres plus loin, sur un pont biais, la voie de retour de Chantilly, et descend ensuite en pente de 0m.005 pour reprendre 375 mètres plus loin (*fig.* 7) le niveau de la voie de retour de Soissons.

Voie de marchandises. Départ (Pl. 138, *fig*. 6, 8 et 9). — Pour compléter ce qui a rapport aux voies de départ, disons

---

(*) Nous avons dépassé ici le maximum admis pour les rampes des voies de départ, mais cela n'a aucun inconvénient à cause de la vitesse acquise par les trains en descendant la pente de 0.012.

de suite qu'à partir des fortifications, la voie spéciale des marchandises expédiées de la Chapelle n° VI s'élève, comme celle de Soissons, en rampe de 0m.005 par mètre pour franchir la voie de retour de Chantilly et de Soissons, et se réunir ensuite à la voie de Soissons (départ) au point *a fig.* 9; les trains de marchandises vont donc ainsi tout naturellement sur la ligne de Soissons.

Quelques mètres après la réunion de ces deux voies, une nouvelle branche se détache de la ligne de Soissons, passe par-dessus les deux voies de Pontoise et descend ensuite en pente de 0m.012 par mètre entre les deux voies de départ I et II pour Chantilly et Pontoise; au pied de la pente, la voie des marchandises n° VI se bifurque pour se réunir (*fig.* 8 et 9 *bis*) sur la gauche à la ligne de Chantilly, et sur la droite à celle de Pontoise.

Ajoutons qu'une voie dite de sûreté, faisant suite à la pente de 0m.012 (*fig.* 8 et 9 *bis*) est disposée pour recevoir et arrêter, avant leur entrée sur les voies de service, les trains de marchandises qui auraient descendu la pente trop vite et n'auraient point obéi aux signaux des aiguilleurs.

Les trains de marchandises, comme ceux de voyageurs, partent donc ainsi, pour toutes les directions, sans couper à niveau aucune voie de retour.

Voies de retour (Pl. 138, *fig.* 9).—Les voies de retour sont, suivant le programme, partout maintenues à leur niveau ancien: elles se réduisent à deux entre Paris et le kilomètre 3, où la voie de Soissons n° V *bis* vient se réunir à celle de Chantilly n° V pour aborder ensuite, à volonté, en gare de Paris, soit le quai de droite, affecté aux trains de grande ligne, soit l'un des quais du centre.

La voie de retour de Pontoise n'est, au contraire, en relation directe qu'avec les quais du centre.

Les trains de marchandises arrivant de Chantilly ou de Soissons trouvent au pont Doudeauville une aiguille en pointe qui permet de dégager de suite la voie d'arrivée,

en envoyant les trains sur une voie spéciale, d'où on les refoule à loisir pour les répartir sur les voies de la gare de la Chapelle.

Quant aux trains de marchandises arrivant par la ligne de Pontoise, il sont d'abord dirigés près du pont O (*fig.* 8 et 9) sur la ligne de Chantilly au moyen d'une jonction de voie 4-3, établie sur ce point entre les deux voies de retour, et ils rentrent ensuite au pont Doudeauville sur la voie spéciale des marchandises.

Réunion des voies de même sens. — Remarquons que, dans ce système, non-seulement, il n'y a jamais, en dehors des gares, croisement à niveau de voies de sens contraire, mais encore deux voies de même sens ne se réunissent ordinairement en une seule qu'après un parcours parallèle assez long pour que l'attention des mécaniciens qui parcourent ces voies soit suffisamment éveillée pour suppléer, au besoin, à l'absence des signaux qui protégent les points de réunion de ces voies.

La voie de Soissons retour, masquée par les remblais de la voie de départ, n'est, il est vrai, parallèle à la voie de retour (Chantilly) que sur une longueur de 200 mètres parce qu'on a tenu à ne pas trop éloigner l'aiguille O des aiguilles 3 et 4 (*fig.* 9); mais on pourrait, au besoin, augmenter cette distance en prolongeant la voie de retour de Soissons sous le pont M établi pour livrer passage à deux voies.

Voies pouvant se suppléer. — Notons encore en passant, ce qui n'est point à dédaigner, que la voie spéciale IV de départ pour Soissons, mise en communication directe, pour le service des marchandises, avec les voies de Chantilly et de Pontoise, permet d'expédier facilement un train de voyageurs pour l'une au l'autre de ces directions, lorsque leurs voies de départ sont interceptées sur un point quelconque des gares de Paris et de la Chapelle; si la voie de départ de Soissons est elle-même encombrée, les trains

peuvent encore partir par la voie spéciale n° 6 des marchandises.

Des facilités analogues, quoique moins complètes, sont données au retour par la jonction 3-4, établie au pont O entre les voies de Chantilly et de Pontoise pour le service des marchandises.

On voit, d'ailleurs, que même dans ces cas spéciaux, il n'y a aucune collision possible entre les trains parcourant les voies de sens contraire.

Facilité de circulation des trains d'aller et retour. — Le but principal que nous avions en vue en proposant ces travaux était, on s'en souvient, d'empêcher les arrêts fréquents en pleine voie et de rétablir la régularité du service, compromise par les précautions imposées au passage du kilomètre 3. Ce but est aujourd'hui complétement rempli; car là où naguère les trains ne pouvaient passer qu'un à un et à très-petite vitesse, ils peuvent aujourd'hui circuler en toute sécurité cinq à la fois (trois au départ et deux à l'arrivée), le plus souvent même, sans ralentissement, comme nous allons le faire voir, en décrivant sommairement le service des aiguilleurs et les signaux qui couvrent les points où deux voies de même sens se séparent ou se réunissent.

Signaux (Pl. 138, *fig.* 9 et 9 *bis*). — Trois postes d'aiguilleurs sont installés :

Le premier A à l'embranchement de la voie des marchandises au départ sur la ligne de Soissons;

Le deuxième B près de la jonction de voie 4-3 au moyen de laquelle on engage sur la ligne de Chantilly les marchandises arrivant par la ligne de Pontoise;

Le troisième C aux aiguilles qui permettent d'envoyer, sur les voies de Pontoise ou de Chantilly, les marchandises partant de la gare de la Chapelle.

Des disques à distance et des disques d'arrêt avec pétard, semblables à ceux que nous avons décrits plus haut,

sont mis à la disposition des trois aiguilleurs, pour couvrir et arrêter, au besoin, les trains dont ils ont à diriger la marche.

Mais ces signaux n'ont plus ici la même importance que dans les bifurcations ordinaires; et, pour laisser aux trains de voyageurs une plus grande liberté d'allure, on n'observe rigoureusement les prescriptions relatives à la vitesse de marche et à l'ouverture tardive des disques d'arrêt que pour le disque de la voie spéciale des marchandises VI et pour celui de la voie de Soissons (retour) V *bis*.

Les disques des voies de Soissons (départ) et de Chantilly (retour) sont ouverts aussitôt que les trains sont en vue; il en est de même pour la voie de retour (Pontoise), au moins en ce qui concerne le service des voyageurs, qui ne peut jamais engager le retour de Chantilly.

Enfin, les deux disques à pétard protégeant le départ des voyageurs pour Pontoise et pour Chantilly sont ordinairement à voie libre, et l'on ne les met l'un ou l'autre à l'arrêt que quand on doit engager sur la voie qu'il protége un train venant d'une voie voisine.

Lorsque l'un de ces deux disques est à l'arrêt, le disque à distance de la voie protégée est lui-même mis à l'arrêt pour tenir lieu d'indicateur de bifurcatiou et avertir les mécaniciens qu'ils doivent marcher avec prudence, de manière à pouvoir s'arrêter avant le disque à pétard, s'il n'est pas effacé au moment de leur arrivée.

Service des aiguilleurs. (Pl. 138, *fig.* 9 et 9 *bis*).—Le service des aiguilleurs est, d'ailleurs, réglé ainsi qu'il suit :

Poste A. L'aiguille n° 2 est habituellement ouverte pour la direction de Soissons; l'aiguilleur, pour engager les trains de ce côté, n'a rien autre chose à faire que de leur ouvrir le disque.

Pour les trains demandant la voie n° VI, il doit faire l'aiguille n° 2, ouvrir le disque à pétard pour laisser passer le train et observer ensuite si un train s'engage devant son

poste sur la voie I, ou sur la voie II, afin d'être en mesure de répondre à son collègue du poste C lorsqu'un des disques à distance placés en face de lui se fermera.

Poste B. Ce poste est installé sur une plate-forme au niveau de la voie de Soissons (départ).

De là l'aiguilleur manœuvre l'aiguille 4 et tous les disques d'arrêt et à distance qui couvrent les trois voies de retour.

Il laisse, en général, passer les trains dans l'ordre où ils se présentent, en évitant, toutefois, d'engager un train de marchandises sur la voie de Chantilly (retour), lorsqu'un train de voyageurs est en vue ou annoncé sur cette voie, ou sur celle de Soissons (retour).

Poste C. L'aiguilleur du poste C est chargé de la manœuvre des aiguilles 5, 6, 7 et 8 et des disques qui les couvrent.

Les aiguilles 5 et 6 sont habituellement placées de manière à donner la direction de la voie de sûreté.

Les aiguilles 7 et 8 sont toujours ouvertes pour donner passage sur les voies n° I et n° II ; leurs contre-poids sont clavetés dans cette position.

Tout train arrivant par la voie VI est tenu de s'arrêter avant le disque à pétard de l'aiguille 5 ; il demande alors sa direction.

Si le train doit se diriger vers la droite (Pontoise), l'aiguilleur du poste C ferme le disque à pétard et le disque à distance qui couvrent l'aiguille 7.

L'aiguilleur du poste A est ainsi prévenu que le train de marchandises a demandé la direction de Pontoise, et si aucun train n'est alors engagé sur cette voie entre le disque à distance et l'aiguille n° 5, il en informe son collègue du poste C, en ouvrant un disque de correspondance affecté à la voie de Pontoise et placé près du poste C.

L'aiguilleur de ce poste fait alors l'aiguille 5 et ouvre le disque à pétard. Aussitôt le train passé, l'aiguille 5 est re-

mise dans sa position normale, et après le délai réglementaire, les disques sont ouverts pour rendre la voie libre.

Si le train demande la direction de gauche (Chantilly), l'aiguilleur ferme les disques qui couvrent l'aiguille n° 8; il consulte ainsi son collègue du poste A, qui répond à l'aide du disque de correspondance affecté à la voie de Chantilly; puis il fait l'aiguille 6 et ouvre le disque à pétard de la voie VI.

Il est bien entendu, d'ailleurs, que si un train était engagé sur l'une des voies de Chantilly ou de Pontoise, entre le disque à distance fermé et le poste C, l'aiguilleur du poste A n'ouvrirait pas le disque de correspondance de la voie engagée; le train de marchandises attendrait alors sur la voie VI que l'aiguilleur du poste A, consulté de nouveau, eût donné à son collègue le signal de laissez passer.

Enclanchements. — Ajoutons que, par surcroît de précaution et pour prévenir les erreurs qui pourraient résulter d'oubli ou de préoccupation des agents chargés des manœuvres, l'aiguilleur du poste C, par une disposition spéciale des leviers, est mis dans l'impossibilité absolue d'ouvrir l'aiguille 5 ou l'aiguille 6 pour les directions de Pontoise ou de Chantilly lorsque le disque de correspondance de la voie parcourue est maintenu à l'arrêt par l'aiguilleur du poste A.

De même, l'aiguilleur du poste A est dans l'impossibilité complète d'ouvrir l'un quelconque de ses disques de commandement et par conséquent de donner le signal : ***Laissez passer***, si le disque à distance de la voie parcourue n'a pas été préalablement mis à l'arrêt par l'aiguilleur du poste C.

Nous obtenons donc, tout à la fois, par ce système, une grande facilité de service et une sécurité complète pour les trains circulant en tous les sens sur cette partie du réseau.

TROISIÈME PARTIE.

Disons maintenant quelques mots des terrassements et des ouvrages d'art.

Surface occupée par les travaux. — Au moment où nous avons proposé les transformations que nous venons de décrire, la plate-forme du chemin de fer, successivement élargie au moyen de décharges et de déblais provenant des gares de Paris et de la Chapelle, n'avait sur aucun point, entre les fortifications et le passage à niveau du Landy, moins de 20 mètres et atteignait souvent 60 mètres de largeur.

Au delà du Landy, la tranchée de la Révolte présentait en outre une largeur suffisante pour y porter, au besoin, le nombre des voies à six.

Nous avions ainsi, partout où nos travaux devaient s'étendre, des emprises assez larges, dans lesquelles il y avait grand intérêt à se maintenir, autant que possible, car le terrain se payait autour de nous de 5 à 10 francs le mètre.

En contournant les voies, en réduisant à un de base pour un de hauteur l'inclinaison des talus de remblais, et en établissant des perrés plus roides aux abords des ouvrages d'art, nous avons pu réduire les acquisitions à quelques ares de terrain.

Position des travaux par rapport aux voies anciennes. — On reconnaît à l'inspection des plans et profils, *fig.* 6 à 13 : 1° que les travaux devaient s'exécuter sur une longueur de près de 3 kilomètres, au milieu des voies de service;

2° Que sur beaucoup de points, et notamment à la bifurcation, les maçonneries et les terrassements devaient occuper l'emplacement même des voies et appareils.

L'exécution offrait donc des sujétions de tous genres et des difficultés d'autant plus sérieuses que, dans les remaniements incessants des appareils et des voies de circulation, nous n'avions pas la faculté d'interrompre un seul instant, ni même de retarder le passage des trains.

Dans ces conditions, les travaux ne pouvaient se faire que par voie de régie, et la traction par locomotive devenait, en quelque sorte obligatoire, tant pour le transport des terres que pour les approvisionnements de toute nature.

Terrassements. — Les nouveaux remblais ont été formés jusqu'à concurrence de 45900 mètres cubes avec des terres prises dans les gares de Paris et de la Chapelle, et pour le reste 25345 mètres cubes, avec les déblais d'approfondissement de la tranchée de la Révolte. Ce dernier travail était, d'ailleurs, rendu relativement facile par l'établissement d'une voie de terrassement raccordée, près de Landy, à la voie de retour de Pontoise, et près de Saint-Denis, à la voie de départ pour Chantilly.

Les wagons chargés étaient amenés au remblai sur l'une des deux voies IV ou VI, que l'on relevait successivement au fur et à mesure de l'avancement du travail : là, les terres étaient déchargées avec soin à la pelle, réglées et régalées après chaque train, au moins près des talus, de manière à ne jamais gêner les voies de circulation.

Ouvrages d'art (Pl. 138, *fig.* 9 et 9 *ter*).—Les croisements à des niveaux différents des voies de départ et d'arrivée s'opèrent dans notre projet sous des angles de 13°.45′ ponts M et N; 11°.18′ pont O et de 8°.15′ pont P: nous ne pouvions pas, dès lors, songer à construire ces ponts entièrement en maçonnerie, et nous avons admis partout les tabliers en tôle reposant sur des culées en pierres, avec supports intermédiaires en fonte pour les deux premiers ouvrages.

Ponts M et N. — Dans les ponts M et N, qui devaient franchir deux voies, nous avons établi le parement des culées normalement à la direction de la voie n° VI; le biais

disparaît ainsi; la longueur des poutres est, il est vrai, portée de 40 à 60 mètres, mais l'exécution des maçonneries est rendue beaucoup plus facile, et, de plus, le cube en est réduit de façon à compenser à peu près l'augmentation de dépense résultant de l'allongement du tablier métallique.

Ces deux ponts ne diffèrent entre eux que par les murs en aile, dont la longueur et la forme étaient commandées pour chacun par la disposition même des lieux.

Les fondations de ces ouvrages ont dû sur plusieurs points être descendues jusqu'à 9^{m}.55 en contre-bas de la plate-forme des anciennes voies, pour atteindre le fonds des emprunts, où l'état avait pris, en 1844, les terres nécessaires à l'exécution du remblai de cette partie de la ligne (profils 10, 11 et 12).

Des fouilles continues exécutées, même avec beaucoup de soin, sur une aussi grande profondeur, si près des voies de circulation, auraient pu compromettre le service du chemin de fer; nous avons alors admis la fondation par puits isolés (Pl. 137, *fig.* 1 et 5) remplis de béton maigre sur 7 mètres de hauteur et réunis entre eux, au-dessous du ballast, par des arceaux en maçonneries, sur lesquels reposent les culées et les murs en ailes.

La hauteur totale des maçonneries varie ainsi de 13^{m}.50 à 14^{m}.50.

Les dés en pierre supportant les colonnes en fonte reposent eux-mêmes sur des fondations en béton maigre, sur toute la hauteur de la fouille.

Les tabliers métalliques, divisés en trois travées de 20 mètres chacune, n'offrant aucune particularité qui mérite d'être signalée, nous devons seulement dire qu'ils ont été, après la pose, remaniés, renforcés et garnis de planchers en bois suffisamment épais pour qu'une machine dont les roues sortiraient accidentellement des rails ne soit pas exposée à passer à travers le tablier; cette condition, qui, jusqu'ici, n'avait été remplie dans la construction

d'aucun pont métallique, en augmente notablement la dépense (*).

Pont O. — Les culées du pont O sont parallèles à l'axe de la voie n° V; elles ont 22m.75 de longueur et sont terminées par des murs en ailes courbes, très-courts du côté des angles aigus et très-développés, au contraire, du côté des angles obtus (Pl. 137, *fig.* 3 et 4).

Les fondations ont été établies, comme celles des deux premiers ponts, par puits remplis de béton maigre et réunis entre eux au moyen d'arcades en maçonneries.

Le tablier en tôle a 28m.30 de portée; quoique biais, il n'offre rien de spécial; il a été, comme les précédents, renforcé pour résister au choc des machines déraillées.

Pont P. — Les culées du pont P sont, comme celles du pont O, parallèles à l'axe de la voie inférieure; mais ici, à cause de leur position spéciale dans une tranchée de 5 mètres de profondeur, elles ont été prolongées sur une assez grande longueur pour faire l'office de murs de soutènement (Pl. 137, *fig.* 6 et 7).

Les murs en aile qui terminent chaque culée sont, l'un perpendiculaire à l'axe de la tranchée et l'autre parallèle aux voies de la ligne de Pontoise qui passent sur le pont.

Le terrain étant partout très-solide, les fondations sont établies à 0m.60 au-dessous des rails; les maçonneries des culées se composent d'ailleurs d'une série de piliers réunis entre eux par des arceaux, qui forment autant de refuges pour les cantonniers ou gardes engagés sous cette espèce de tunnel au moment du passage des trains (Pl. 137, *fig.* 6).

Le tablier métallique est formé dans cet ouvrage d'une suite de poutrelles en tôle de 4m.55 de portée, posées normalement à la direction des voies supérieures et reliées entre

(*) Les consolidations opérées dans ce but ont donné lieu pour l'ensemble des 4 ponts à une dépense nouvelle de plus de 50,000 fr., comprise dans les relevés de dépense qui terminent cette note.

elles par des cours de longrines en fer, placées directement sous les rails de ces voies.

Toutes les poutrelles sont, d'ailleurs, scellées au portland dans les culées du pont. Enfin, le tablier a été, comme ci-dessus, renforcé après coup.

Perrés en maçonnerie et à pierres sèches. — Ajoutons pour compléter ce qui a rapport aux ouvrages d'art :

1° Que le sol de l'arcade centrale du pont de la Révolte a dû être abaissé de 2^{m}.50 (Pl. 138, *fig.* 6 et 8) pour laisser passer la nouvelle voie de Chantilly, départ, et que ce travail a pu s'effectuer sans modifier en rien les fondations du pont; des perrés en maçonnerie établis de chaque côté de la tranchée, sur une longueur de 27^{m}.60, suffisent pour éloigner toute crainte de dégradations sur ce point.

2° Que des perrés en maçonnerie ou à pierres sèches, suivant l'inclinaison qu'on a pu leur donner, ont été établis sur plusieurs points des nouveaux déblais et remblais et notamment aux abords des ponts et de la maison des aiguilleurs, construite au niveau des anciennes voies, sur le pont des Fruitiers (Pl. 138, *fig.* 9).

Malgré les circonstances difficiles dans lesquelles se présentait le travail, nous avons pu réaliser en une année l'ensemble de ces transformations, sans aucun accident et sans gêne appréciable pour l'exploitation.

Base des évaluations de dépense.

Il est assez difficile d'indiquer avec certitude, au moins en ce qui concerne les voies, la dépense résultant de l'ensemble des travaux qui nous occupent; en effet, nous avons vu plus haut que la double bifurcation sur le tronc commun (Pl. 138, *fig.* 2) rendait le service extrêmement difficile, et qu'il y avait nécessité de modifier au plus tôt cet état de choses.

Des voies nouvelles étaient donc indispensables; leur

nombre et leur longueur restaient à déterminer; un projet (*fig.* 3) était complétement étudié, mais on n'avait pas encore renoncé à l'idée de desservir chaque direction par deux voies spéciales, partant de la gare de Paris.

Il est certain qu'on ne doit porter au compte du nouveau projet aucune des voies nouvelles dont la nécessité était reconnue.

A-t-on en réalité posé plus ou moins de rails et de traverses qu'on ne l'aurait fait en complétant, suivant les errements anciens, les installations insuffisantes de 1864.

Nous n'avons sur ce point aucune donnée précise, et pour ne pas rester dans le vague, nous admettrons pour tous les projets l'égalité de longueur des voies et du nombre des appareils, et nous ne porterons au débit de l'opération que les remaniements de voies et de ballast, les poses et déposes qui ont été la conséquence du travail lui-même (1).

Tout en admettant l'égalité du nombre des voies, il eût peut-être été juste de faire figurer en dépense la valeur des terrains occupés par les talus de déblais et de remblais de nos nouveaux terrassements; mais à quel prix les porter? Au prix d'acquisition ou à la valeur actuelle?

Ces terrains avaient été achetés pour la presque totalité, au moment de la construction de la ligne, à 0f.95 le mètre environ; on les payerait maintenant six et peut-être dix fois autant.

Pour éviter toute incertitude, nous ne parlerons pas des 2 hectares environ occupés par ces talus, et nous ne ferons figurer au compte que les 900 mètres de terrain achetés nouvellement à l'origine de la ligne de Soissons.

Ceci posé, voici comment se décomposent les dépenses des travaux en question.

(*) Le prix d'une voie Vignole neuve en rails de 37 kilog. éclissés peut être évalué sur ce point à 34 francs par mètre courant, ballast compris.

1° Acquisition de terrains et terrassements :

Acquisition de 906 mètres de terrain y compris indemnité aux occupants.	4526.00	
Déblais de moellon dur dans la tranchée de la Révolte pour fouille, transport et mise en remblai 10345 mètres cubes à 3 francs.	31035.00	
Déblais de terre, sable et marne dans la même tranchée pour fouille, transport et mise en remblai, 15000 mètres cubes à 1f.50.	22500.00	123821.00
Relèvement de la voie de départ pour Soissons et formation des cavaliers nouveaux au moyen de terres prises dans les gares de Paris et de la Chapelle, 45900 mètres cubes à 1f.40.	64260.00(*)	
Ensemencement de talus 5 kilomètres à 300 francs.	1500.00	

2° Ponts en tôle :

PONT M.	Déblais des fondations compris montage au seau, 990 mètres à 1f.40.	1386.00	
	Béton maigre à 0m.15 de chaux pour 1 mètre de sable, 603 mètres à 11 francs.	6633.00	
	Maçonnerie de moellon brut et chaux hydraulique (**), 411 mètres à 16 francs.	6576.00	
	Maçonnerie de moellon smillé, 42 mètres à 22 francs.	924.00	
	Maçonnerie de pierre de taille, 35 mètres à 50 francs.	1750.00	69574.00
	Parements vus de pierre de taille, 110 mètres à 10 francs.	1100.00	
	Parements vus de moellon smillé 270 mètres à 3 francs.	810.00	
	Fers pour tablier et fontes pour colonnes, compris pose, 87030 kilog. à 48 francs les 100 kilog.	41774.40	
	Percement sur place pour fers ajoutés après coup.	117.60	
	Bois de charpente pour plancher, 64 mètres à 130 francs.	8320.00	
	Goudronnage des bois, 610 mètres à 0f.30.	183.00	
	A reporter		193395.00

(*) Il eût été plus exact de ne pas porter en compte et de ne mentionner ici que pour mémoire, cette somme de 64260 francs, représentant la totalité des dépenses pour fouille, transport et mise en remblais de terres provenant des gares de Paris et de la Chapelle.

En effet, les déblais exécutés dans ces gares étaient utiles, indispensables même, et l'emploi des terres entre les fortifications et le P.-N. du Landy a procuré à la compagnie du Nord une économie réelle, car il en aurait coûté notablement plus cher pour les envoyer aux décharges publiques ou pour les porter en dépôt dans les anciens emprunts de Saint-Denis, où nous plaçons depuis quelques années toutes les terres en excès provenant de Paris ou de la Chapelle.

(**) Tous les prix de maçonnerie sont plus faibles que ceux que l'on paye habituellement dans la banlieue de Paris, parce que les moellons et la pierre de taille étaient fournis par les carrières exploitées par la compagnie et qu'ils arrivaient directement à pied d'œuvre, sans aucun des faux frais que subissent les matériaux sur les chantiers ordinaires.

Report 193 395.00

PONT N.	Déblais des fondations y compris montage au seau, 670 mètres à $1^{f}.40$	938.00	65 785.00
	Béton maigre 390 mètres à 11 francs	4 290.00	
	Maçonnerie de moellon brut, 370 mètres à 16 francs	5 920.00	
	— de moellon smillé, 41 mètres à 22 francs	902.00	
	— de pierre de taille, 36 mètres à 50 francs	1 800.00	
	Parements vus de pierre de taille, 100 mètres à 10 francs	1 000.00	
	— de moellon smillé, 145 mètres à 3 francs	435.00	
	Fers pour tablier et fontes pour colonnes, 86 979 kilog. à 48 francs	41 749.92	
	Bois de charpente pour planchers, 65 mètres à 130 francs	8 450.00	
	Percements sur place pour fers ajoutés après coup	117.08	
	Goudronnage des bois du plancher, 610 mètres à $0^{f}.30$	183.00	
PONT O.	Déblais pour fouilles des fondations, 980 mètres à $1^{f}.40$	1 372.00	55 194.00
	Béton maigre, 485 mètres à 11 francs	5 335.00	
	Maçonnerie de moellon brut, 610 mètres à 16 francs	9 760.00	
	— de moellon smillé, 90 mètres à 22 francs	1 980.00	
	— de pierre de taille, 52 mètres à 50 francs	2 600.00	
	Parements vus de pierre de taille, 110 mètres à 10 francs	1 100.00	
	— de moellon smillé, 345 mètres à 3 francs	1 035.00	
	Fers pour tablier, 55 654 kilog. à 50 francs les 100 kilog.	27 827.00	
	Bois pour plancher, 29 mètres à 130 francs	3 770.00	
	Percement sur place des fers ajoutés après coup	325.00	
	Goudronnage des bois du plancher, 300 mètres à $0^{f}.30$	90.00	
PONT P.	Déblais ordinaire pour fouilles des fondations, 500 mètres à 1 franc	500.00	90 990.00
	Déblais dans le tuf et le moellon, 1 200 mètres à 3 francs	3 600.00	
	Montage exceptionnel par puits, 600 mètres à $0^{f}.75$	450.00	
	Maçonnerie de moellon brut et ébauché, $814^{m}.10$ à 16 fr.	13 025.60	
	— de moellon smillé, $471^{m}.50$ à 22 francs	10 373.00	
	— de pierre de taille, 75 mètres à 50 francs	3 750.00	
	Parements vus de pierre de taille, 220 mètres à 10 francs	2 200.00	
	— de moellon smillé, 1 402 mètres à 3 francs	4 206.00	
	— de moellon ébauché à joints incertains, $240^{m}.60$ à $1^{f}.50$	360.90	
	Chape au mortier de ciment, 210 mètres à 2 francs	420.00	
	Tablier en fer et tôle, $77\,347^{k}.50$, à 50 francs les 100 kilogrammes	38 673.75	
	Bois de charpente pour plancher, 99 mètres à 130 francs	12 870.00	
	Perçage sur place des fers ajoutés	420.95	
	Goudronnage des bois du plancher, 466 mètres à $0^{f}.30$	139.80	

A reporter 405 364.00

3° Murs de soutènement et perrés. — Maison de garde.

Report.		405 364.00
Maçonnerie de moellon brut et ébauché, 181ᵐ.90 à 16 fr.	2 910.40	
— de moellon smillé, 155ᵐ.50 à 22 francs. . . .	3 421.00	
— à pierres sèches, 1 021 mètres à 6 francs. .	6 126.00	
Parements vus de moellon smillé, 414ᵐ.70 à 3 francs. .	1 244.10	
— de moellon ébauché, 666ᵐ.40 à 1ᶠ.50. . .	999.60	
Bordures servant de heurtoirs, 148 mètres à 11ᶠ.50. . . .	1 702.00	18 646.00
Barrières en bois de chêne pour parapets, 37 mètres à 2ᶠ.50.	92.50	
Déplacement et reconstruction de la maison de garde du P.-N. du Landy.	2 150.40	

4° Remaniement des voies et des appareils. — Frais de surveillance.

Ripage de voies compris dégarnissage et regarnissage de ballast, 9 200 mètres à 0ᶠ.75.	6 900.00	
Dépose et repose successives avec transport des matériaux, dégarnissage et regarnissage de ballast, 13 100ᵐ à 1ᶠ.30	17 030.00	35 990.00
Pose et dépose des appareils de changements et traversées de voies, signaux, etc.	4 700.00	
Frais de surveillance et d'exécution des travaux, environ.	7 360.00	
Total.		460 000.00

Application aux bifurcations simples.

Il n'est peut-être pas inutile de rappeler en terminant cet article, que les chemins de fer exploités présentent souvent en pleine voie, des bifurcations pour lesquelles on aurait pu établir à peu de frais, au moment de la construction l'indépendance des voies de départ et d'arrivée.

Les compagnies de chemins de fer, on le comprend facilement, ne se décideront maintenant à modifier cet état de choses que sur les points où, comme à La Chapelle Saint-Denis, la nécessité en sera bien démontrée ; mais pour l'avenir il paraît prudent d'éviter, autant que possible, le croisement à niveau des voies de sens opposé sur tous les

points où les chemins nouveaux viennent se raccorder en pleine ligne sur des chemins à grande circulation.

La compagnie du Nord vient d'entrer dans cette voie sur deux points différents :

1° A la rencontre du chemin d'Amiens à Rouen (embranchement de Buchy avec la ligne de Rouen à Dieppe) :

2° A la jonction de la ligne d'Amiens à Tergnier avec celle de Creil à Erquelines.

Ajoutons, pour rendre justice à qui de droit, que dès l'année 1845, la compagnie de Versailles, rive droite, avait donné aux ingénieurs français un premier spécimen de cette indépendance des voies de départ et d'arrivée en faisant passer sous le chemin de Versailles, rive droite, la voie de droite de l'embranchement desservant sa nouvelle gare de Saint-Cloud.

Paris, le 10 novembre 1866.

N° 154

NOTE

Sur les meilleures formes à donner aux poutres droites en fonte.

(APPENDICE à la Note insérée aux *Annales des ponts et chaussées* sous le N° 184 du tome XIV, 1857.)

Par M. DECOMBLE, ingénieur en chef des ponts et chaussées.

---

1. *L'ancienne définition de la limite de l'élasticité est inexacte.* — M. Couche, ingénieur en chef, professeur de construction et de chemin de fer à l'École impériale des mines, dans une brochure intitulée : « *Analyse et discussion des nouvelles expériences faites, principalement en Angleterre, sur la résistance du fer, de la fonte et de quelques autres matériaux,* » a résumé comme il suit les résultats principaux de ces expériences : « On a admis jusqu'à présent qu'aussi longtemps que les forces appliquées à un solide ne dépassaient pas une certaine limite, le corps devenu libre reprenait exactement sa forme et ses dimensions primitives ; et l'on attachait beaucoup d'importance à la détermination de cette limite, qu'on regardait comme celle des efforts auxquels le solide pouvait résister indéfiniment. Dès que l'application de la fonte commença à se généraliser, on ne tarda pas à reconnaître qu'elle pouvait supporter d'une manière permanente des charges capables de lui imprimer des déformations persistantes très-notables ; *qu'elle diffère seulement des autres matériaux de construction, par la nature plus tranchée, plus sensible des*

phénomènes; et les expériences de M. Wertheim tendent, en effet, à démontrer que *tous les corps* soumis pendant un certain temps, et soustraits ensuite, à l'action des forces *mêmes les plus faibles*, ont éprouvé dans leur constitution, dans l'état de leur équilibre moléculaire, une altération permanente ; l'application d'une nouvelle force, différente de la première seulement en intensité, n'introduit pas de nouvelle altération permanente tant que cette intensité est inférieure, ou au plus égale à la première (*); mais dès qu'elle la dépasse, une nouvelle altération se produit. Les expériences de M. Hodgkinson confirment ces résultats. La limite de l'élasticité, telle qu'on la définit ordinairement, repose donc sur une *notion inexacte*; elle n'a pas, comme on l'a supposé pendant longtemps, la valeur d'un *critérium absolu.* Il n'en est pas moins vrai, cependant, que pour les matériaux autres que la fonte, la limite d'élasticité subsiste, sinon rigoureusement, du moins comme fait pratique, car les efforts auxquels ces matériaux peuvent être soumis sans danger, ne leur impriment que des déformations permanentes très-faibles. »

Définition à admettre dans la pratique des travaux. — En résumé, principalement en ce qui concerne les ponts (où de petites déformations demeurent toujours sans importance), *la limite de l'élasticité* paraît devoir se définir ainsi : « L'effort élastique correspondant à la plus grande charge qu'un solide peut supporter sans rompre, quelle que soit la durée de l'épreuve. »

Principe général de la mise en œuvre des matériaux. — D'un autre côté, le principe général de la mise en œuvre des matériaux dans les travaux publics, indépendamment de la nature de ces matériaux et des efforts qu'ils sont appelés à supporter, est le suivant : « La limite pratique de la

(*) Motif net de la coutume administrative de faire subir à tous les tabliers métalliques, avant de les livrer à la fréquentation publique, certaines épreuves proportionnées à la fatigue probable.

tension moléculaire ne doit être dépassée nulle part, elle doit être atteinte partout. » (Couche.)

Dans ces conditions nouvelles, les formules de Navier, relatives à l'équilibre des poutres droites, sont-elles encore applicables? — Par conséquent, il faut reconnaître franchement que le calcul des dimensions à donner à une poutre de pont ne saurait être rigoureusement d'accord avec les hypothèses abstraites que les géomètres ont dû prendre pour base de leurs recherches purement spéculatives, et qu'il est dès lors nécessaire d'examiner si les formules mathématiques de Navier, sur la résistance ou l'équilibre des poutrelles droites, n'exigeraient pas de coefficient de correction.

2. Si l'on se reporte d'abord aux résultats du calcul des dimensions de la poutre de 12m.50 de longueur totale et de 12 mètres de portée franche entre les appuis, du pont jeté sur le canal du moulin de la Grosse-Tour, à Bernay de l'Eure (c'est-à-dire aux calculs des articles 50 et 51 de la note n° 184 du tome XIV des *Annales des ponts et chaussées*, cahier de novembre et décembre 1857), on trouve que l'introduction dans les formules de Navier, de données numériques déduites de l'application de ces mêmes formules à la rupture totale et instantanée de petits modèles, a fourni, savoir :

h, étant la hauteur totale de la poutre au point considéré,

ε, l'épaisseur commune à toutes les parois de cette pièce,

a, la largeur de la plate-bande ou nervure horizontale soumise à la compression,

a_1, la largeur de la plate-bande ou nervure horizontale soumise à l'étirement,

avec $h = 0^m.528$, et par suite $\varepsilon = 0^m.0358$: $a = 0^m.0881$,

$$a_1 = 0.4759,\ \frac{a_1}{a} = 5.40\ ^*;$$

avec $h = 0.515$, et par suite $\varepsilon = 0.0314$: $a = 0.0847$,

$$a_1 = 0.4655,\ \frac{a_1}{a} = 5.50;$$

avec $h = 0.482$, et par suite $\varepsilon = 0.0293$: $a = 0.0830$,

$$a_1 = 0.4470,\ \frac{a_1}{a} = 5.39;$$

avec $h = 0.432$, et par suite $\varepsilon = 0.0276$: $a = 0.0817$,

$$a_1 = 0.4206,\ \frac{a_1}{a} = 5.15;$$

avec $h = 0.353$, et par suite $\varepsilon = 0.0268$: $a = 0.0810$,

$$a_1 = 0.3799,\ \frac{a_1}{a} = 4.69;$$

avec $h = 0.244$, et par suite $\varepsilon = 0.0255$: $a = 0.0800$,

$$a_1 = 0.3252,\ \frac{a_1}{a} = 4.07;$$

avec $h = 0.163$, et par suite $\varepsilon = 0.0251$: $a = 0.0797$,

$$a_1 = 0.2852,\ \frac{a_1}{a} = 3.59;$$

avec $h = 0.122$, et par suite $\varepsilon = 0.0247$: $a = 0.0794$,

$$a_1 = 0.2652,\ \frac{a_1}{a} = 3.34;$$

avec $h = 0.067$, et par suite $\varepsilon = 0.0239$: $a = 0.0788$,

$$a_1 = 0.2407,\ \frac{a_1}{a} = 3.09;$$

Mais pour les profils les plus hauts que M. Hodgkinson ait étudié par tâtonnement, dans une suite d'expériences entreprises sur la plus vaste échelle (profils dont la hauteur

* Anomalie qui est due, sans doute, à quelque faible erreur d'observation relative à la valeur de ε (article 2 de la note des *Annales*).

paraît avoir atteint $0^m.70$), cet habile constructeur a indiqué, si nos renseignements sont bien exacts, que les formes de plus grande résistance à la rupture totale et instantanée, comme à la rupture de la force élastique, correspondent tout égal d'ailleurs à $\frac{a_1}{a} = 5$ au moins, et $\frac{a_1}{a} = 6.50$ au plus : l'épaisseur de la planche étant souvent moindre et quelquefois plus grande que celle des plates-bandes horizontales, et ces plates-bandes n'ayant pas toujours des épaisseurs identiques.

En outre, pour un profil de ($0^m.06$) de hauteur seulement, avec $\varepsilon = (0^m.01)$, l'expérience directe indiquée en la note précitée des *Annales*, donne $\frac{a_1}{a} = (3.33)$ environ.

Par conséquent, on peut conclure en toute sécurité que les chiffres consignés dans le tableau précédent, et qui proviennent de l'introduction dans les formules générales de Navier des résultats d'expériences de rupture complète faites au moyen de poutres de petits modèles, sont complétement d'accord avec les résultats empiriques des Anglais, puisque avec ($0^m.52$) de hauteur de profil, ces formules ont donné $\frac{a_1}{a} = 5.42$ (nombre compris entre 5 et 6.30, indiqués par M. Hodgkinson), et pour ($0^m.067$) de hauteur avec ($0^m.0239$) d'épaisseur de parois, $\frac{a_1}{a} = 3.09$ [nombre voisin de (3.33), qui correspond à $\varepsilon = (0^m.01)$].

Il en est d'autant mieux ainsi, que la plate-bande horizontale d'une poutre ne résistant pas seule (ou bien, la partie de la planche verticale juxtaposée du même côté de l'axe neutre résistant avec elle), le rapport des plates-bandes doit évidemment varier avec l'épaisseur des parois, à hauteur égale de profil : circonstance dont une sorte de *recette interpolée* comme celle de M. Hodgkinson, ne peut guère tenir compte, et qui découle naturellement et complétement, au contraire, du calcul géométrique.

3. Puis, la pensée de ne permettre aux poutres droites que des flexions négligeables, a naturellement conduit les constructeurs à admettre pour R_1, limite de la résistance élastique à la compression dans ces poutres, une valeur identique à celle de R'_1, limite de la résistance élastique à la compression exercée dans le sens même des fibres d'une barre trop longue relativement à ses dimensions transversales pour ne pas fléchir avant de rompre, mais d'ailleurs artificiellement empêchée de céder à cette tendance ; et de même, que l'on a $R_2 = R'_2$, ces coefficients se rapportent à la traction comme R_1 et R'_1 à la compression : en résumé que l'on peut supposer dans le cas de la fonte, par exemple, $R_2 = R'_2 = 4$ à 6 kilogrammes par $(0^m.001)^2$, et $R_1 = R'_1 = 12$ à 18 kilogrammes (ces valeurs étant données pour R'_1 et R'_2, par les expériences nombreuses et précises de M. Hodgkinson).

Or cette appréciation arbitraire se vérifie complétement, non-seulemeut dans le cas des grands ponts sans flexion sensible, mais dans le cas des moindres poutrelles et *jusqu'à l'instant même de la rupture totale et instantanée*, si l'on applique les formules de Navier à la recherche des coefficients de résistance à cette rupture : car si l'on se reporte encore une fois à la note insérée aux *Annales* de novembre et décembre 1857, on voit (article 10) que dans une série de sept poutrelles ayant toutes ($1^m.60$) de longueur, ($1^m.50$) de portée entre les appuis, ($0^m.06$) de hauteur de profil, ($0^m.01$) d'épaisseur de parois, même surface de section transversale, métal identique, dont la première pièce avait deux plates-bandes horizontales égales entre elles, et dont les six autres pièces avaient une plate-bande supérieure de plus en plus petite (la plate-bande inférieure s'agrandissant de tout ce que l'autre perdait), la poutrelle n° 3 ou 3' a résisté le plus entre toutes à la rupture instantanée ; qu'elle a cédé seulement sous la charge ($3434^k.35$) concentrée en son milieu, tandis que la poutrelle correspon-

dante à profil symétrique, n° 1 ou 1', a donné à la fois *la moindre flexion et la moindre résistance*, en se brisant sous la charge (2 261^k.95). — Et si l'on examine les applications y relatives des formules de Navier, reproduites par les articles 13, 14 et 15 de ladite note, on trouve qu'elles ont conduit aux valeurs numériques suivantes, se rapportant à la rupture instantanée : $R''_1 = (51^k.15)$, $R_2'' = (17^k.07)$. Or, d'après les expériences anglaises, très-complètes sous ce rapport, il en résulterait pour *coefficients de sécurité* sous une charge tranquille, $R_1''' = \frac{51^k.15}{3} = (17^k.05)$, et $R_2''' = \frac{17^k.07}{3} = (5^k.69)$. — Mais, en outre, l'article 19 fait voir que pour une fonte de qualité exceptionnelle, donnant avec parois épaisses de $(0^m.01)$, $R_1'' = (57^k.20)$ par $(0.001)^2$, on n'obtient déjà plus que $R_1'' = 43^k.20$ avec des parois épaisses de $(0^m.05)$; enfin, qu'une autre fonte donnant $R_1'' = (47^k.70)$ avec parois de $(0^m.01)$, a donné $R'' = (37^k.50)$ avec parois de $(0^m,05)$: c'est-à-dire que pour ce dernier métal (cependant de très-bonne qualité encore), on avait en parois de $(0^m.05)$ d'épaisseur, $R_1''' = \frac{R_1''}{3} = \frac{47^k70}{3} = (12^k.50)$, et $R_2''' = \frac{R_1'''}{3}$ approximativement $= (4^k.17.)$

En d'autres termes, l'application des formules de Navier au calcul des coefficients de rupture totale et instantanée, conduit à admettre pour les fontes de Dammarie-sur-Saulx (Meuse), et suivant l'épaisseur des parois mises en œuvre, $R_1 = (12^k.50)$ à $(17^k.05)$, $R_2 = (4^k.17)$ à $(5^k.69)$: résultats qui sont d'accord avec ceux précités, recueillis par M. Hodgkinson.

4. *Les formules mathématiques de Navier sont applicables jusques et y compris l'instant de la rupture totale et instantanée.* — Par conséquent, on est fondé à conclure que, « sans coefficient de correction, les formules mathéma-

« tiques de Navier sont applicables non-seulement jusqu'à la « limite de l'élasticité telle qu'on doit l'entendre désormais « dans la pratique, mais encore jusqu'à la rupture totale et « instantanée elle-même » ; ou bien, que l'on peut admettre, sans erreur appréciable dans les applications, la permanence complète (ou l'extension jusqu'à la rupture totale et instantanée) de l'hypothèse théorique de la proportionnalité des effets et des causes, qui a servi de base à la recherche de ces formules.

5. ***Dans la poutre droite qui se rompt, soit par son élasticité seulement, soit d'une manière totale et instantanée par compression et par étirement à la fois, l'axe neutre se confond avec le lieu géométrique du milieu de la hauteur des sections transversales.*** — Dans ces conditions, les calculs numériques approximatifs des articles 13, 14 et 15 de la note n° 184 du tome XIV des *Annales*, conduisent à supposer que dans la poutre en fonte où la rupture complète et instantanée se produit simultanément par compression et par étirement, l'axe neutre passe au milieu de la hauteur de la section transversale de rupture, au moment même où cette rupture se produit.

Il est possible de démontrer rigoureusement qu'il en est encore ainsi à l'instant de *la rupture de l'élasticité* de la poutre en laquelle cette rupture de l'élasticité s'opère simultanément par compression et par étirement :

En effet, à l'instant qui précède la rupture de son élasticité, la pièce qui vient d'être définie (Pl. 137, *fig.* 8) développe une somme maxima de réactions élastiques.

Cette somme est exprimée d'une manière générale par la relation connue,

$$(1)\ldots\ S = \frac{R_1}{b}\cdot\frac{ab^3 - a'b'^3}{3} + \frac{R_2}{b_1}\cdot\frac{a_1b_1^3 - a'_1b'^3}{3},$$

en laquelle a, a', a_1, a'_1, b, b', b_1, b'_1 ont les significations indiquées par la figure, R_1 exprime la limite de la résis-

tance à la rupture de l'élasticité par compression, et R_2 la limite de la résistance à la rupture de l'élasticité par étirement.

On a d'ailleurs, entre ces mêmes quantités, l'équation d'équilibre :

$$(2)\ldots\ \frac{R_1}{b}\cdot\frac{ab^2-a'b'^2}{2}=\frac{R_2}{b_1}\cdot\frac{a_1b_1^2-a_2'b_1'^2}{2};$$

plus, dans le cas particulier de la fonte, les relations (3).... $a-a'=a_1-a'_1=b-b'=b_1-b'_1=\varepsilon$, ε étant une fonction déterminée de $b+b_1=h$, c'est-à-dire d'une quantité généralement fournie par les données du problème de construction.

Il en résulte qu'en introduisant les relations (2) et (3) dans l'équation (1), on peut obtenir alternativement S en fonction de a, b et b_1, ou bien de a_1, b et b_1 :

$$(4)\ldots\ S=\frac{R_1}{3b}\Big[a(b^3-(b-\varepsilon)^3)+\varepsilon(b-\varepsilon)^3\Big]+$$
$$+\frac{R_2}{3b_1}\left[\frac{\frac{R_1b_1}{R_2b_2}\Big[a(b^2-(b-\varepsilon)^2)+\varepsilon(b-\varepsilon)^2\Big]-\varepsilon(b-\varepsilon)^2}{b_1^2-(b-\varepsilon)^2}\right]\times$$
$$\times(b_1^3-(b_1-\varepsilon)^3)+\varepsilon(b_1-\varepsilon)^3),$$

$$(5)\ldots\ S=\frac{R_1}{3b}\left[\frac{\frac{R_2b_2}{R_1b_1}\Big[a_1(b_1^2-(b_1-\varepsilon)^2)+\varepsilon(b_1-\varepsilon)^2\Big]-\varepsilon(b_1-\varepsilon)^2}{b^2-(b-\varepsilon)^2}\times\right.$$
$$\left.\times(b^3-(b-\varepsilon)^3)+\varepsilon(b-\varepsilon)^3\right]+\frac{R^2}{3b_1}\Big[a_1(b_1^3-(b_1-\varepsilon)^3)+\varepsilon(b_1-\varepsilon)^3\Big].$$

En sorte qu'en égalant à *zéro* chacune des dérivées de (4) relativement aux trois variables indépendantes a, b et b_1, on aurait trois relations qui, jointes à la relation (2), fourniraient un système de quatre équations entre quatre inconnues, déterminant à l'aide des égalités (3), toutes les dimensions de la poutre remarquable indiquée.

Mais il en serait exactement de même si l'on égalait à *zéro* chacune des dérivées de (5) relativement à a_1, b et b_1.

Par conséquent, la dérivée de (4) relativement à a, c'est-à-dire :

$$(6)\ldots\ b^3-(b-\varepsilon)^3+\frac{b^2-(b-\varepsilon)^2}{b_1^2-(b_1-\varepsilon)^2}\times(b_1^3-(b_1-\varepsilon)^3)=0,$$

et la dérivée de (5) relativement à a_1, ou bien :

$$(7)\ldots\ b_1^3-(b_1-\varepsilon)^3+\frac{b_1^2-(b_1-\varepsilon)^2}{b^2-(b-\varepsilon)^2}\times(b^3-(b-\varepsilon)^3)=0,$$

doivent nécessairement être satisfaites par les mêmes valeurs de b et de b_1.

Or, les valeurs de b et de b_1 qui satisfont à la première équation étant mises respectivement à la place de b_1 et de b dans la seconde, satisfont évidemment à cette dernière: par conséquent, $b=b_1$.

Donc, l'axe neutre de la poutrelle où la rupture de l'élasticité s'effectue simultanément par compression et par étirement, est le lieu géométrique du milieu de la hauteur des sections transversales.

Rappelons maintenant qu'une poutre n'a pas un seul état-limite d'élasticité, puisque l'expérience démontre qu'il en existe réellement et littéralement autant que d'efforts supportés au-dessous de ce qu'il faut entendre désormais par la charge correspondante à la limite de l'élasticité.

Donc, à chacune des charges comprises entre zéro et celle qui abandonnée indéfiniment sur la poutre finirait par en déterminer la rupture, correspondrait une certaine distribution de métal, par conséquent un système de valeurs des résistances-limites d'élasticité (R_1 et R_2), qui conserverait la rupture simultanée par compression et par étirement, une force élastique maxima, et, par suite, l'axe neutre superposé au lieu géométrique précité (bien entendu, la

longueur totale de la pièce, la portée, les épaisseurs de parois et la hauteur de chacune des sections transversales demeurant constantes).

En outre, les formules de Navier pouvant être considérées comme applicables à l'équilibre entre la charge et les réactions jusques et y compris le moment de la rupture totale et instantanée, rien n'empêcherait, évidemment, de répéter toutes les considérations précédentes à propos de la série continue des charges comprises entre celle qui déterminerait la rupture de l'élasticité et celle qui correspondrait à la rupture totale et instantanée (en retrouvant ainsi, sous une forme plus nette, les indications rappelées déjà, des calculs numériques approximatifs des articles 13, 14 et 15).

Une loi générale ressort donc de tout ce qui vient d'être dit : indépendante des valeurs de R_1, de R_2 et de $\frac{R_1}{R_2}$ (R_1 et R_2 continuant à exprimer les limites des réactions correspondantes à chacun des états-limites d'élasticité par compression et par étirement à la fois, qui pourraient être constitués sous les charges comprises entre o et la charge qui entraînerait la rupture totale et instantanée).

Mais, qu'elles fussent poursuivies sur des barres capables de se rompre par compression, ou sur des barres capables de se rompre par étirement, les expériences anglaises ont fait voir que le coefficient de sécurité sous une charge tranquille, égale, pour la fonte, le tiers du coefficient de résistance à la rupture totale et instantanée ; que le coefficient de sécurité sous les routes ordinaires, égale $\left(\frac{1}{7.5}\right)$ du même coefficient de résistance ; enfin, que le coefficient de sécurité sous les chemins de fer, égale $\frac{1}{9}$ de cette même résistance encore.

Par conséquent, si l'on a ponr conditions de l'équilibre

entre la charge et les efforts élastiques au moment de la rupture totale et instantanée :

$$R_1 \cdot \frac{ab^2 - a'b'^2}{2b} = R_2 \cdot \frac{a_1b_1{}^2 - a'_1b'_1{}^2}{2b_1},$$

$$R_1 \cdot \frac{ab^3 - a'b'^3}{3b} + R_2 \cdot \frac{a_1b_1{}^3 - a'_1b'_1{}^3}{3b_1} = \frac{Pl}{4}$$

(dans le cas d'une charge entièrement concentrée au milieu de la pièce),

On aura certainement, à l'instant de la rupture de ce qu'il faut entendre désormais par rupture de l'élasticité :

$$\frac{R_1}{n} \times \frac{ab^3 - a'b'^2}{2b} = \frac{R_2}{n} \times \frac{a_1b_1{}^2 - a'_1b'_1{}^2}{2b},$$

$$\frac{R_1}{n} \times \frac{ab^3 - a'b'^3}{3b} + \frac{R_2}{n} \times \frac{a_1b_1{}^3 - a'_1b'_1{}^3}{3b_1} = \frac{P}{n} \times \frac{4}{l},$$

n étant égal à 3, (7.5), ou 9, suivant les circonstances.

Donc « l'expérience conduit bien réellement à considérer « les réactions élastiques comme variant proportionnelle- « ment à la charge, quand cette charge rétrograde depuis « celle qui détermine la rupture totale et instantanée jus- « qu'à celle correspondant à la rupture de ce qu'il faut « appeler, dans la pratique des travaux, l'élasticité. »

Et, par suite, « les équations capables de déterminer les « dimensions de la poutre qui se romprait d'une manière « totale et instantanée simultanément par compression et « par étirement, sont identiques avec les équations capa- « bles de déterminer les dimensions de la poutre dont l'élas- « ticité se romprait de même », ou bien « il est rationnel « (au point de vue des applications, au moins) d'admettre « que le nombre de poutres indiquées plus haut comme « ayant pour axe neutre le lieu géométrique du milieu de « la hauteur des sections transversales, et dans lesquelles

« la distribution du métal varierait avec le rapport $\frac{R_1}{R_2}$, se « réduit pour le constructeur à une seule poutre, à celle « qui se rompt totalement et instantanément par compres- « sion et par étirement à la fois. »

Cette déduction des expériences de Wertheim, corroborées par celles de M. Hodgkinson, a d'ailleurs une de ces raisons d'être contre lesquelles une simple idée abstraite demeure impuissante : « Si l'on donnait à un constructeur le choix entre les deux poutrelles de même prix et de même portée, n° 1′ et n° 3′, dont il a été question plus haut, le n° 1 se rompant d'une manière totale et instantanée sous la charge (2 261ᵏ.95) concentrée en son milieu, et le n° 3′ sous la charge similaire (3 344ᵏ.35), on ne persuaderait sans doute que très-difficilement ce constructeur (aussi expérimenté qu'il fût) de préférer le n° 1′, attendu que le n° 3′ lui paraîtrait toujours offrir contre les chocs et autres causes accidentelles et soudaines de rupture, des garanties trop précieuses pour être négligées. »

6. *Poutre droite unique dont l'ingénieur ait à s'occuper.* — En résumé, « la seule poutre droite dont l'ingénieur ait à « s'occuper (dans les projets de routes ou de chemins de « fer) a toujours pour axe neutre le lieu géométrique du mi- « lieu de la hauteur des sections transversales ; et les ef- « forts qu'elle supporte à chaque instant par sa fibre la plus « comprimée, et par sa fibre la plus tendue, sont respecti- « vement et constamment proportionnels à la résistance à « la rupture totale et instantanée par écrasement, et à la « résistance totale et instantanée par traction. »

7. *Les largeurs des plates-bandes* (ou nervures horizontales), *a et a_1, ne sauraient être égales dans la poutrelle capable de se rompre simultanément par compression et par étirement, sauf dans le cas où l'on aurait, par hasard,* $R_1 = R_2$ *à l'instant de la rupture totale et instantanée,* — Dès lors, il devient fort simple de prouver que les largeurs

a et a_1 des plates-bandes ou nervures horizontales des poutres droites en lesquelles la rupture de l'élasticité se produit simultanément par compression et par étirement, ne sauraient être identiques tant que l'on n'a pas $R_1 = R_2$ au moment de la rupture totale et instantanée.

Car supposons numériquement connues la valeur maxima de S et la valeur maxima que les circonstances du projet permettent d'adopter pour $(b + b_1)$; d'où $b = b_1 = \frac{h}{2}$.

Écrivons les relations (4) et (5) de l'article 3 précédent, sous la forme ci-après :

$$(4')\ldots\ S = a_1 \left[2R_2 \, . \, \frac{b^3 - (b-\varepsilon)^3}{3b}\right] + (R_1 + R_2) \, . \, \frac{\varepsilon(b-\varepsilon)^3}{3b} +$$

$$+ R_1 \left(\frac{1}{K} - 1\right) \left[\frac{\varepsilon(b-\varepsilon)^3}{3b(b^2 - (b-\varepsilon)^2)} \, . \, (b^3 - (b-\varepsilon)^3)\right];$$

$$(5')\ldots\ S = a \left[2R_1 \, . \, \frac{b^3 - (b-\varepsilon)^3}{3b}\right] + (R_1 + R_2) \, . \, \frac{\varepsilon(b-\varepsilon)^3}{3b} +$$

$$+ R_2(K - 1) \left[\frac{\varepsilon(b-\varepsilon)^3}{3b(b^2 - (b-\varepsilon)^2)} (b^3 - (b-\varepsilon)^2)\right].$$

Soit, pour simplifier l'écriture :

M, la valeur numérique de $\frac{b^3 - (b-\varepsilon)^3}{3b}$;

N, — de $\frac{\varepsilon(b-\varepsilon)^2}{3b}$;

P, — de $\frac{\varepsilon(b-\varepsilon)^3}{b^2 - (b-\varepsilon)^2}$;

nous aurons :

$$S = a_1 \times 2R_2M + (R_1 + R_2)N - R_2(K - 1) \, . \, PM,$$

et

$$S = a \times 2R_1M + (R_1 + R_2)N + R_2\,(K - 1) \, . \, PM;$$

puis
$$\frac{a_1}{a} = K \times \frac{\dfrac{S - (R_1 + R_2)N}{PMR_2} + (K - 1)}{\dfrac{S - (R_1 + R_2)N}{PMR_2} - (K - 1)} :$$

c'est-à-dire une expression de la forme

$$\frac{a_1}{a} = K \times \frac{c + (K - 1)}{c - K - 1)},$$

c étant une constante numérique.

Égalant cette expression à l'unité, on a :

$$(K - 1)(K + c + 1) = 0 ;$$

d'où
$$K = 1, \quad \text{et} \quad K = -(c + 1).$$

Par conséquent « a et a_1 ne sauraient être égaux dans la « poutrelle où la rupture de l'élasticité a lieu simultané- « ment par compression et par étirement, sauf dans l'hypo- « thèse où l'on aurait $R_1 = R_2$; ou, en d'autres termes, « sauf, dans le cas où la rupture totale et instantanée de la « fibre la plus comprimée et celle de la fibre la plus tendue « s'y produiraient sous des efforts de même intensité. »

8. ***Nécessité de proscrire désormais, de tous les calculs, le coefficient unique de résistance appelé coefficient de résistance à la flexion.*** — Mais pour que les formules de Navier portent le caractère de généralité et de parfaite exactitude qui doit effectivement leur être attribué, il est nécessaire que ces formules renferment, non pas un coefficient unique R (dit coefficient de résistance à la rupture par flexion), mais bien les deux coefficients analogues (R_1 et R_2) de résistance à la rupture par compression et par étirement. En effet,

La poutrelle n° 3 ou 3' de l'article 10 de la note n° 184 du tome XIV des *Annales*, ayant résisté le plus entre les sept pièces de la série dont l'ensemble a servi dans l'expérience indiquée, s'est rompue simultanément par la fibre la plus

comprimée et par la fibre la plus tendue : par conséquent, la poutrelle n° 2 ou 2′ a évidemment cédé par la plate-bande inférieure, et la poutrelle n° 4 ou 4′ par la plate-bande supérieure. Or cela revient à dire que dans la poutrelle n° 2 ou 2′, la limite de la résistance élastique à un effort de traction (R_2) a été atteinte, tandis qu'une partie seulement de la résistance élastique à un effort de compression (R_1) s'est trouvée mise en jeu; puis que dans la poutrelle n° 4 ou 4′, la limite de la résistance élastique à la compression (R_1) a été atteinte à son tour, tandis qu'une partie seulement de la résistance élastique à la traction (R_2) a été utilisée ; ou bien que la poutrelle n° 3 ou 3′, dans laquelle les limites des résistances élastiques ont été simultanément atteintes, pouvait *seule* fournir par sa rupture, les véritables valeurs de $\frac{R_1}{R_2}$, de R_1 et de R_2, c'est-à-dire les éléments de tous les calculs de l'ingénieur.

Ainsi, dans le cas où l'on voudrait trouver la position de l'axe neutre et la fraction R'''_1 de R_1, utilisée dans la poutrelle n° 2 ou 2′, on aurait les équations :

$$\frac{R_1'''}{b} \times \frac{ab^2 - a'b'^2}{2} = \frac{R_2}{b_1} \times \frac{a_1 b_1^2 - a_1' b_1'^2}{2},$$

$$\frac{R_1'''}{b} \times \frac{ab^3 - a'b'^3}{3} + \frac{R^2}{b_1} \cdot \frac{a_1 b_1^3 - a_1' b_1'^3}{3} = \frac{Pl}{4},$$

$b + b_1 = h$, h étant une hauteur déterminée.

On y introduirait $h = (0^m.061)$; $R_2 = 17\,100\,000$ kilogrammes, valeur en nombre rond trouvée par la rupture de la poutrelle de métal identique n° 3 au 3′; $a = (0^m.067)$, $a_1 = (0^m.142)$, $P = (3395^k.35)$, $l = (1^m.50)$, $(a - a') = (a_1 - a'_1) = (0^m.01)$, à bien peu près; $(b - b') = (0^m.0133)$, et $(b_1 - b'_1) = (0^m.0114)$.

Elles deviendraient ainsi :

$$R_1''' = R_2 \times \frac{b}{b_1} \times \frac{a_1 b_1^2 - a'_1 b'^2_1}{ab^2 - a'b'^2} = 17\,100\,000^k \times \frac{b'}{b} \times$$

$$\times \frac{(0.142)\,.\,b_1^2 - (0.132)(b_1 - 0.0104)^2}{(0.067)b^2 - (0.057)(b - 0.0113)^2},$$

$$R_1''' \times \frac{(0.067)b^3 - (0.057)(b - 0.0113)^3}{3\,.\,b} + 17\,100\,000^k \times$$

$$\times \frac{(0.142)b_1^3 - (0.132)(b_1 - 0.0104)^3}{3\,.\,b_1} = (1259.76),$$

$$b + b_1 = (0^m.061),$$

et seraient à résoudre par élimination ou par tâtonnement.

Cette dernière méthode, suffisante quant à la pratique des constructions et beaucoup plus expéditive à l'aide des tables des quarrés et des cubes, donne approximativement :

$$R_1''' = 49.590.000 \text{ kilogrammes},$$
$$b = 0^m.016,$$
$$b = 0^m.045.$$

De sorte que :

1° La poutrelle qui se rompt à la fois par compression et par étirement, semble, même empiriquement, la seule où l'arc neutre se confond avec le lieu géométrique du milieu de la hauteur des sections transversales ;

2° L'application des formules de Navier « à la recherche « d'un coefficient unique », dit de résistance à la rupture par flexion, « ne pourrait manquer de fournir autant de « valeurs différentes pour ce coefficient, qu'il y aurait de « formes diverses de poutrelles (même avec des plates- « bandes égales et à plus forte raison dans le cas opposé), » malgré l'identité parfaite du métal dans toutes les pièces, et la complète possibilité d'étendre l'emploi des formules jusqu'à la rupture totale et instantanée.

En d'autres termes, les anomalies et les contradictions apparentes si fréquemment signalées à la suite de l'emploi

des formules de Navier dans la recherche des coefficients de résistance des matériaux (anomalies et contradictions apparentes qui ont trop souvent conduit à se défier outre mesure de ces matériaux, notamment de la fonte) semblent résulter, non pas précisément de la nature plus ou moins variable de ces matériaux, encore moins de l'insuffisance gratuitement supposée des formules précitées, mais surtout de la manière dont on s'est généralement servi de ces dernières en y introduisant le seul coefficient de résistance à la rupture par flexion.

9. *Enseignements complémentaires résultant des expériences faites, en ce qui regarde la recherche des coefficients de résistance à la compression et à l'étirement.* — L'ensemble de ce qui précède doit faire considérer comme certain que, pour obtenir les coefficients de résistance nécessaires aux calculs de l'ingénieur, on a, dans chaque cas particulier, liberté de choix entre la détermination de R_1 et de R_2 en suivant les indications de la note n° 184 du tome XIV des *Annales*, où la détermination de R_1 et de R_2 (ou bien simplement de R_2, si $\frac{R_1}{R_2}$ est connu d'avance), au moyen d'expériences de compression et de traction directes, c'est-à-dire exercées dans le sens même des fibres.

C'est ainsi, par exemple, que l'on peut admettre généralement dans le calcul des dimensions des poutres droites en fer laminé sollicitées par une charge tranquille, les valeurs $R_1 = 12^{kil}$ à $(14^k.40)$, $R_2 = 15$ à 18 kilogrammes par $(0^m.001)^2$ de section, trouvées par M. Hodgkinson au moyen de la compression et de la traction directes : par conséquent

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{12^k \text{ à } 14^k.40}{15^k \text{ à } 18^k.00} = \frac{4}{5}.$$

Toutefois c'est ici le lieu de rappeler une remarque antérieurement faite : Il est convenable de se défier de ce

dernier mode d'expérimentation, parce qu'il ne paraît pas tenir un compte suffisant du rapport entre la surface entière et le périmètre de la section : en d'autres termes, de la constitution intime des parois métalliques en quelque sorte stratifiées par pellicules superposées, toutes de grains, de textures, et de résistances différentes.

Enfin, il faut se souvenir que, suivant expérience, les valeurs de R_1 et de R_2 à introduire dans les calculs d'application peuvent être, avec une complète sécurité, considérées comme équivalentes à $\frac{1}{3}$ des résistances à la rupture totale et instantanée, mais avec la condition de compter la charge « simple » dans le seul cas d'une « charge tranquille ; » la charge « multipliée par (2.5), » dans le cas d'une charge animée de la vitesse et provoquant les chocs et les trépidations normalement rencontrés sur les routes ordinaires en empierrement ; enfin, la charge « triple, » dans l'hypothèse d'une charge sollicitée par la vitesse et provoquant les chocs et les trépidations constatés sur les chemins de fer. — De sorte que, dans le calcul des poutres droites qui seraient uniquement sollicitées par un train de chemin de fer, les valeurs numériques des coefficients de résistance à introduire dans les formules de Navier pourraient être approximativement, savoir :

1° *Pour la fonte :*

$$R_1 = \frac{17^k.05 \text{ à } 12^k.50}{3} = (5^k.68) \text{ à } (4^k.17),$$

et

$$R_2 = \frac{5^k.68 \text{ à } 4^k.17}{3} = (1^k.90) \text{ à } (1^k.40);$$

2° *Pour le fer :*

$$R_1 = \frac{14^k.48 \text{ à } 12^k}{3} = (4^k.80) \text{ à } 4^k,$$

et

$$R_2 = \frac{18^k \text{ à } 15^k}{3} = 6^k \text{ à } 5^k.$$

Il est probable, du reste, que la continuation des recherches mathématiques entreprises sur le choc des corps (notamment par le général Poncelet), et que la poursuite de l'étude des quantités de « calories » développées dans les mêmes circonstances, ne tarderont pas à fournir une mesure exacte de la valeur du choc considéré comme force.

Toulouse, le 16 janvier 1867.

Nota. — Quoique le mémoire précédent soit en opposition sur plusieurs points avec les principes généralement admis, la commission des *Annales* a cru devoir le publier tel qu'il a été présenté par l'auteur, à raison de l'intérêt du sujet et comme suite au travail déjà inséré dans ce Recueil, en 1857.

TABLES DES MATIÈRES

DISPOSÉES

PAR ORDRE D'INSERTION ET PAR ORDRE ALPHABÉTIQUE,

POUR

LES MÉMOIRES ET DOCUMENTS

PUBLIÉS EN 1867.

1er SEMESTRE.

PREMIÈRE TABLE.

RÉCAPITULATION GÉNÉRALE PAR ORDRE D'INSERTION.

DEUXIÈME TABLE.

ANALYSE DES MATIÈRES PAR ORDRE ALPHABÉTIQUE.

Q

R

S

achèvement, 4. — Grands ponts en cours d'exécution, dépense restant à faire pour leur achèvement au 1er janvier 1867, 5.

Navigation intérieure. Longueur en kilomètres : des rivières, des canaux, 7.—Travaux exécutés sur la basse Seine ; sur les lignes de Paris à Strasbourg et au Rhin par la Marne; de Paris à Lyon et à la Méditerranée par la haute Seine, l'Yonne, la Saône et le Rhône, 7. — Barrage éclusé de Suresnes, 7. — Id. de Martot, 8. — Seine maritime; prolongement des digues jusqu'à Berville, situation des travaux. 8. — Marne, canalisation depuis Dizy jusqu'à son embouchure dans la Seine : construction de neuf barrages éclusés; dérivation de Saint-Maurice et de Chelles, 8. — Haute Seine. Canalisation entre Paris et Montereau au moyen de douze barrages éclusés, 9. — Barrages à construire sur l'Yonne, 9. —Saône, construction d'un barrage éclusé au passage de Collonges, 9. — Rhône, travaux entrepris sur les passages les plus difficiles du fleuve, 10. — Canal maritime de Saint-Louis à la mer, 10.— Basse Garonne. succès des travaux exécutés, travaux restant à entreprendre, 11. — Répartition des crédits au budget de 1866, pour l'amélioration des rivières, 11. — Travaux d'amélioration sur la Charente aux passages de Bourg-Charente et de Saint-Savinien ; sur la Boutonne, la Nive, le Var, le lac Léman, l'Arve, la Dranse, la Meuse et la Lys, 12. — Réparation des dommages causés par l'inondation de septembre 1866, 12 — Travaux d'amélioration sur les canaux de Bretagne, du Centre, de Bourgogne, du Rhône au Rhin, de l'Ill canalisée, du Berry, de Roanne à Digoin, du Nivernais, de l'Aisne à la Marne, de la Somme, de la haute Deule et de Saint-Quentin, 13. — Canal des houillères de la Sarre livré à la navigation 13. — Ouverture du canal de Vitry à Saint-Dizier, travaux restant à faire en amont jusqu'à Chamouilley, 14. — Continuation des travaux des canaux de la Rochelle à Marans, de la haute Seine entre Troyes et Villebertin et de Roubaix, 14.

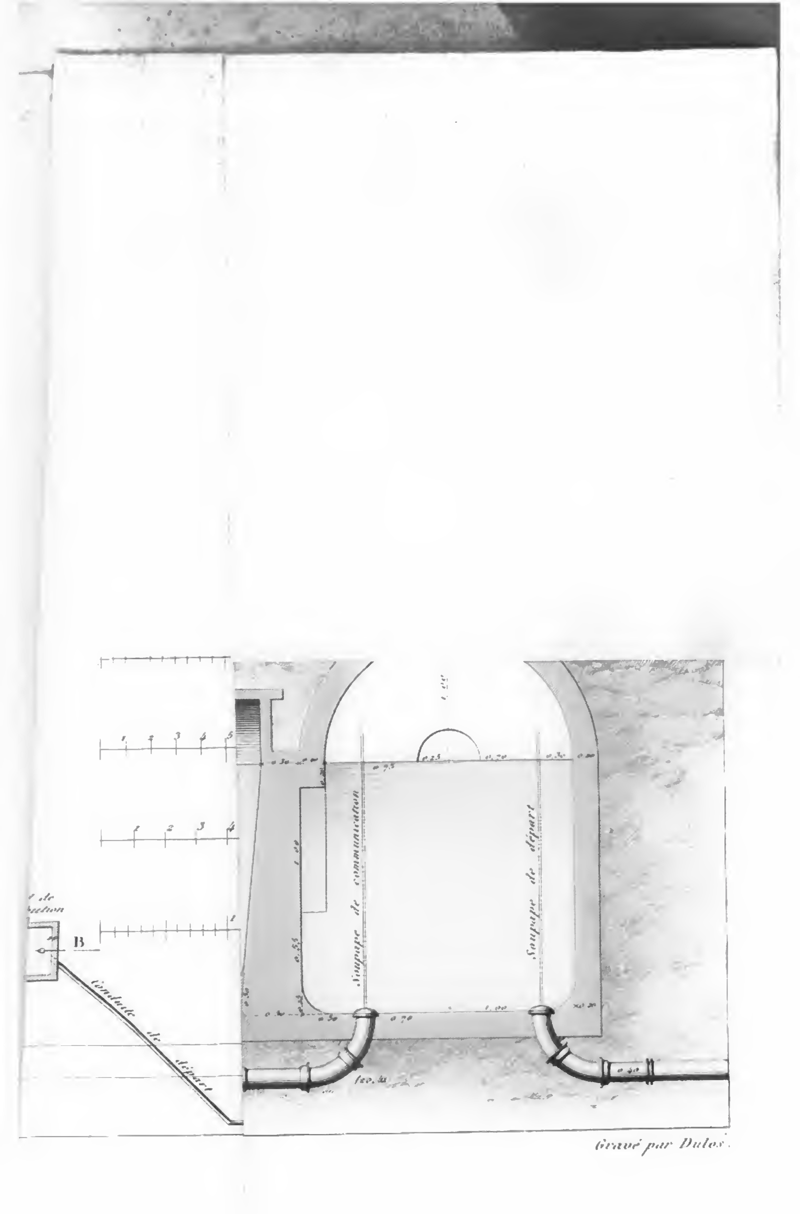
Ports maritimes. Mouvement maritime, 14. Progression du tonnage, résultats en 1864, 15.—Ports où l'augmentation s'est fait particulièrement sentir, 15. — Crédit affecté en 1866, 16. — Travaux du port de Marseille, 16. — Port du Havre, élargissement du chenal et construction d'un brise lames, annexion des terrains de la citadelle pour l'agrandissement du port. 16. — Port de Bordeaux, élargissement des quais des Chartrons et de Bacalan, quais verticaux, 17.— Port de Dunkerque, travaux divers, 17, 18. — Port de Boulogne, construction du bassin à flot, 18. — Port de Cette, approfondissement du canal maritime, 18. — Port de Dieppe, prolongement du quai Bérigny, 18. — Port de Calais, restauration des jetées, abaissement du radier de l'écluse du bassin à flot, 18. — Port de Brest, travaux du port Napoléon dans l'anse de Porstrein, 19, Port de Saint-Nazaire, bassin de Penhoüet. 19. — Port d'Honfleur, reconstruction de la jetée du milieu et travaux divers. 20. — Port de Saint-Malo; établissement d'un bassin à flot, 20. — Travaux d'amélioration dans les ports de Bastia, Rochefort, Cherbourg, Bayonne, Fécamp, Gravelines, Marans, des Sables, de Propriano, de Trouville, du Tréport, 21. — Eclairage et balisage des côtes, travaux divers, 22.

Service hydraulique. Routes agricoles de la Sologne, 22. — Canal de la Sauldre, 23. — Dombes. Routes agricoles, desséchements, 23.— Brenne. Routes agricoles, 23. — Corse. Construction de fontaines publiques, canal dérivé de la Gravona, 24. — Routes agricoles de la Double, de Lot-et-Garonne, des Landes de Gascogne, 24. — Drainage, prêts autorisés, situation au 1er janvier 1866, 25.—Mise en valeur des terrains communaux, 26. — Assainissements et desséchements, 27. — Curages, 27, — Usines, 28.— Irrigations, 28.— Canal de la Neste, 29. — Canal du Verdon, 29. — Canal du Forez, 30. — Canal du Drac, 30. — Canal de Saint-Martory, 30. — Canal de la Siagne, 31.

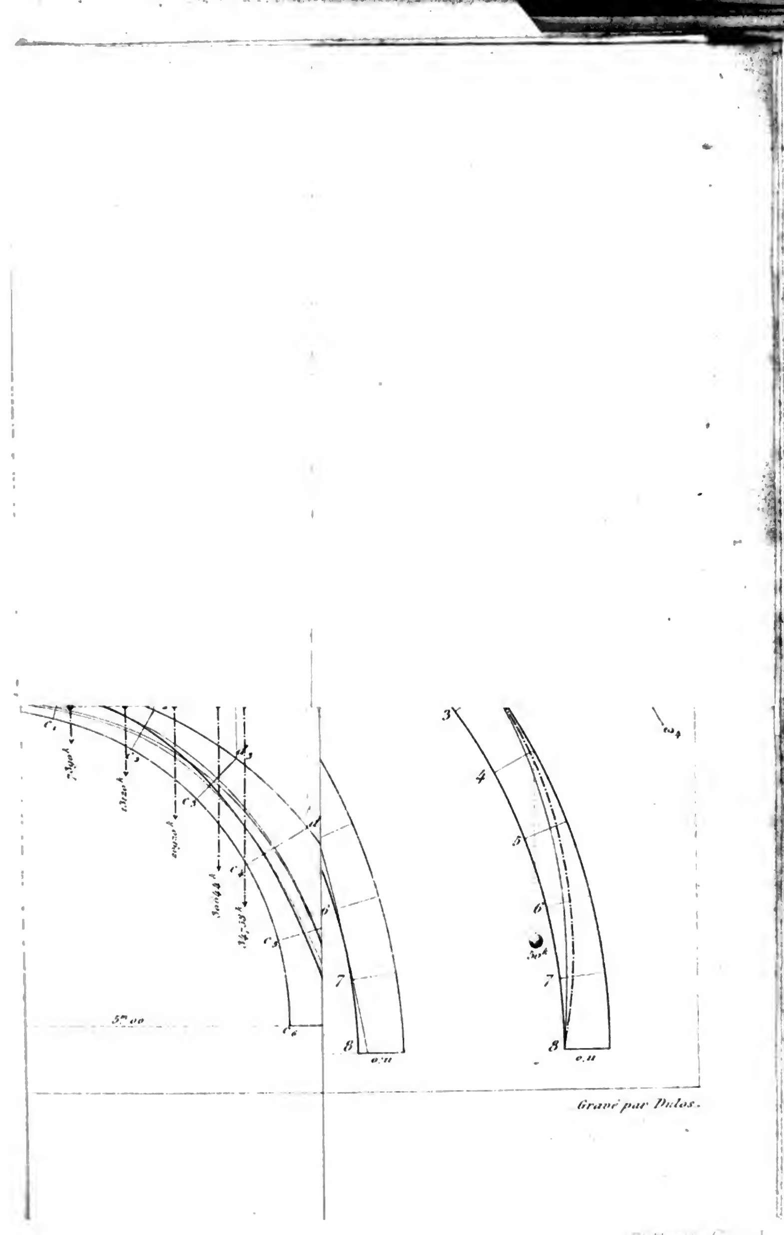
Chemins de fer. Situation au 31 décembre 1866, 32. — Tableau,

FIN DES TABLES DES MÉMOIRES DU 1er SEMESTRE 1867.

Paris. — Imprimé par E. Thunot et Ce, rue Racine, 26.

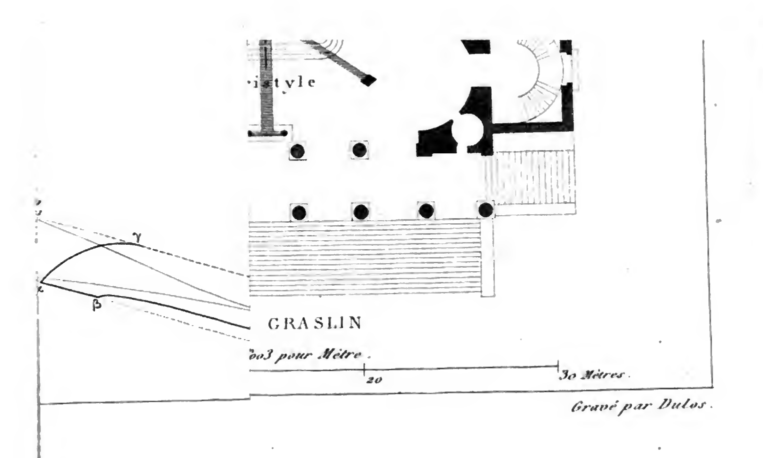

Soupape de communication
Soupape de départ
Conduite de départ
B
Gravé par Dulos.



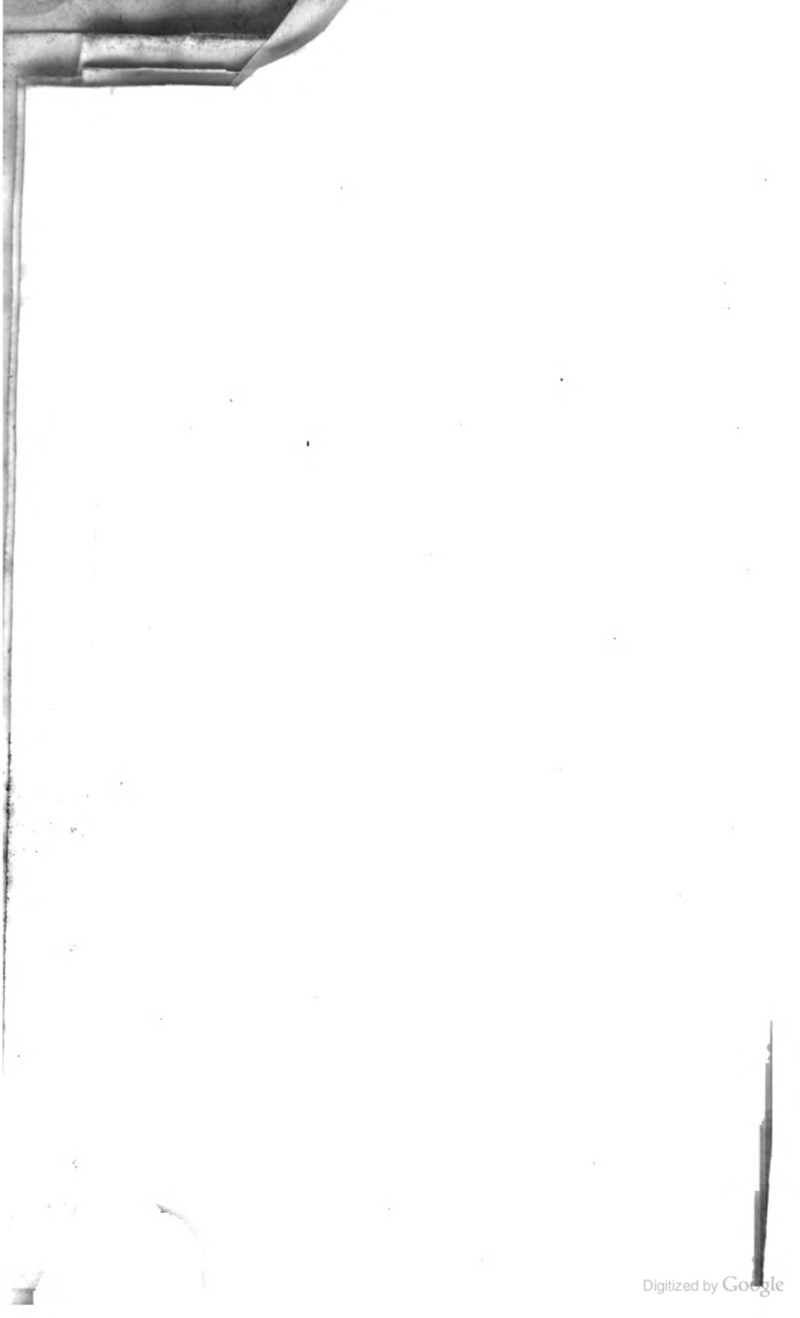


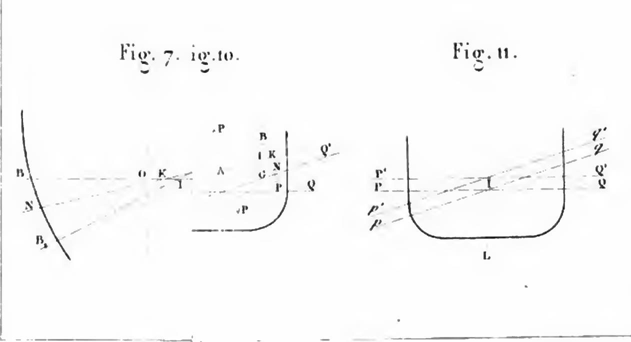
Gravé par Dulos.



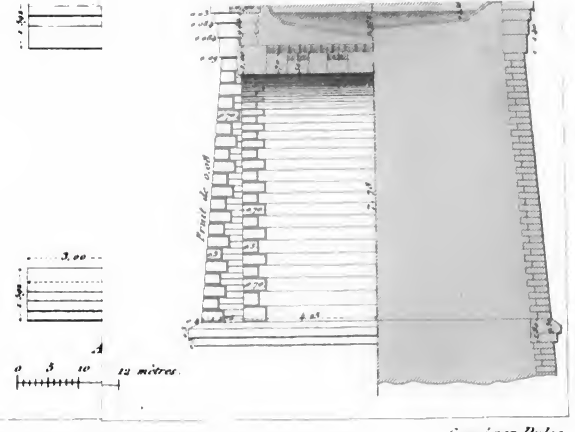


istyle
γ
β
GRASLIN
003 pour Mètre.
20
30 Mètres.
Gravé par Dulos.

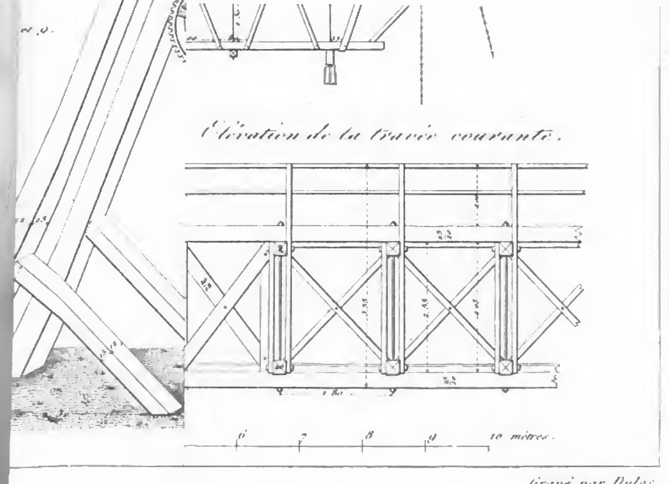




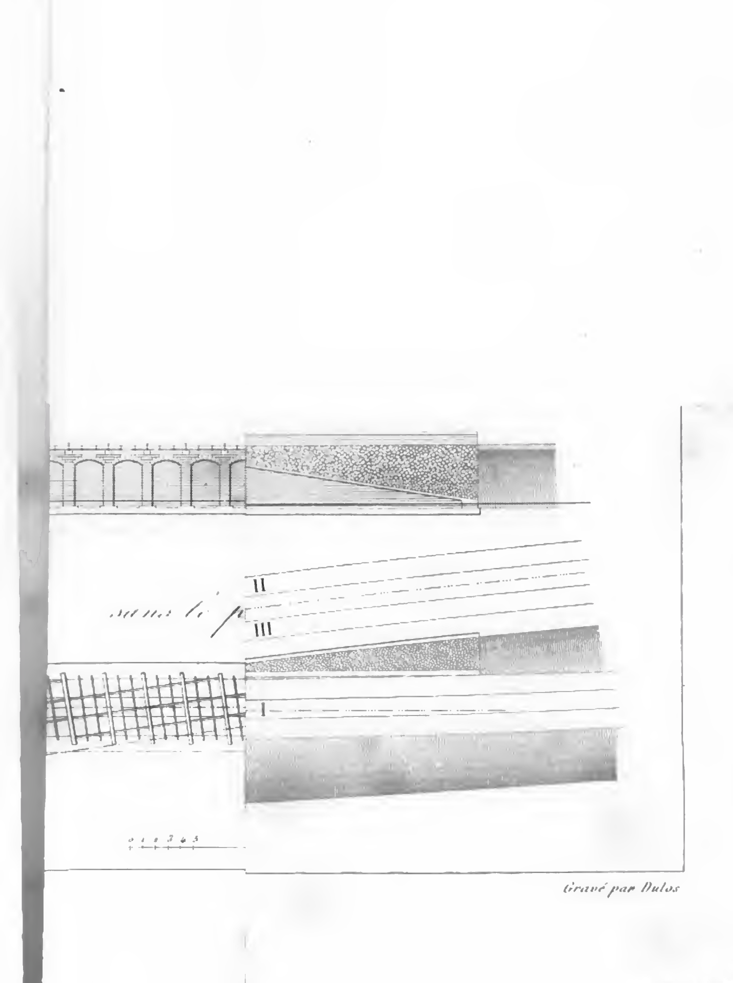
Gravé Dulos sc.

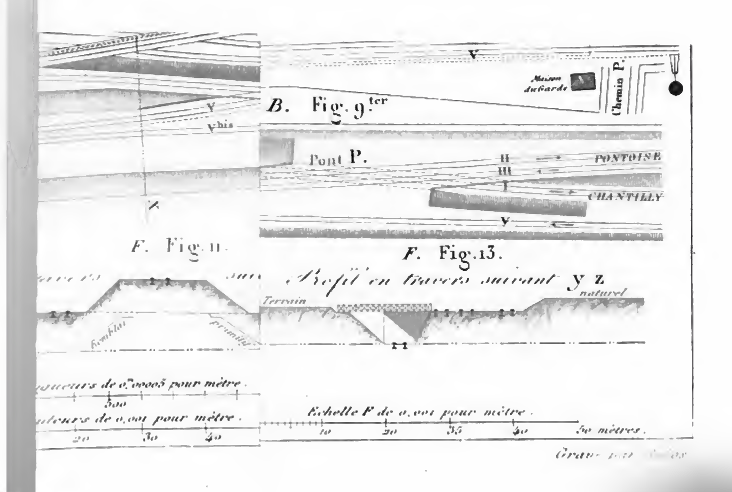


Gravé par Dulos.



Gravé par Dulos


II
III
I
0 1 2 3 4 5
Gravé par Dulos



V
Vbis
B. Fig. 9.ter
Maison du Garde
Chemin P.
Pont P.
PONTOISE
CHANTILLY
F. Fig. 11.
F. Fig. 13.
Profil en travers suivant y z
Terrain naturel
Remblai
Echelle F de 0,001 pour mètre.
50 mètres.

Gravé par

